



Transporte en atmósferas estelares

Fontenla, Juan Manuel
1985

Tesis Doctoral

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

www.digital.bl.fcen.uba.ar

Contacto: digital@bl.fcen.uba.ar

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Fuente / source:

Biblioteca Digital de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

TRANSPORTE EN ATMOSFERAS ESTELARES

Autor

Juan Manuel Fontenla

Director de Tesis

Constantino Ferro Fontán

Lugar de Trabajo

Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas

Instituto de Astronomía y Física del Espacio

1934
(2)

Tesis presentada para optar al título de Doctor en Ciencias Físicas

1985

INDICE

| | Página |
|--|--------|
| INTRODUCCION | 1 |
| CAPITULO I | |
| Antecedentes | 6 |
| CAPITULO II | |
| Fundamentación | 18 |
| 2.1 Definiciones | 18 |
| 2.2 Ecuaciones cinéticas | 25 |
| 2.3 Magnitudes características | 47 |
| 2.4 Ecuaciones hidrodinámicas | 64 |
| 2.5 Coeficientes de transporte | 73 |
| 2.6 Plasmas ideales | 85 |
| 2.7 Validez de los coeficientes | 89 |
| CAPITULO III | |
| Método | 93 |
| 3.1 Resolución de las ecuaciones cinéticas | 94 |
| 3.2 Términos de colisiones de Boltzmann | 107 |
| 3.2.1 Colisiones electrón-átomo | 108 |
| 3.2.2 Colisiones átomo-átomo | 109 |
| 3.2.3 Colisiones protón-átomo | 112 |
| 3.2.4 Conversión de secciones eficaces | 113 |
| 3.2.5 Velocidad de la partícula emergente | 118 |
| 3.2.6 Dispersión elástica de fotones | 119 |
| 3.2.7 Ionización y recombinación | 120 |

| | Página |
|--|--------|
| 3.3 Términos de colisiones de Landau | 122 |
| 3.4 Términos de colisiones de Fokker-Planck | 129 |
| 3.5 Expresión numérica de operadores | 132 |
| 3.6 Coeficientes de transporte | 144 |
| 3.7 Unidades | 157 |
| 3.8 Límites de validez | 158 |
| CAPITULO IV | |
| Cálculos | 160 |
| 4.1 Particiones | 160 |
| 4.2 Comprobaciones | 164 |
| CAPITULO V | |
| Conclusiones | 167 |
| Figuras | 177 |
| Tablas | 209 |
| Bibliografía | 245 |
| Agradecimientos | 250 |

INTRODUCCION

Este trabajo está orientado a servir de base y proporcionar valores coherentes a los coeficientes de transporte que se utilizan en astrofísica para la elaboración de modelos de las atmósferas de las estrellas.

Si bien en la literatura no existe una definición única de la atmósfera, en éste trabajo llamaremos atmósfera estelar a aquella parte de la estrella en que se originan los fotones (de radiación electromagnética) observables desde la tierra.

En éste marco , entonces , podría decirse que la atmósfera estelar es directamente observable. Sin embargo , la observación del espectro de los fotones emitidos no permite una evaluación automática de las variables macroscópicas como presión, temperatura , etc. Esto se debe en parte a la gran inhomogeneidad de esas atmósferas.

Por lo antedicho es necesario evaluar modelos correspondientes a diversas hipótesis sobre la física de la atmósfera en cuestión , a partir de esos modelos calcular el espectro que emitirían , y compararlo con el espectro observado para así confirmar o descartar las hipótesis propuestas.

El cálculo de los espectros emitidos en base a modelos , se realiza resolviendo las ecuaciones conocidas como "de equilibrio estadístico" y de "transporte radiativo". Para ello existen en principio tres métodos standard : el de "linealización completa" debido a Auer y Mihalas (Mihalas , 1978) , el de "sustitución de la integral formal" debido a Skumanich y Doménico (Doménico , 1972) y el de "átomo equivalente de dos niveles" debido a Averett (Athay , 1972).

El autor de éste trabajo ha utilizado anteriormente los dos primeros métodos (Fontenla y Rovira 1982 y Fontenla 1979).

Para el cálculo de los modelos , se deben resolver las ecuaciones hidrodinámicas correspondientes al problema y las hipótesis propuestas

y deben incluirse los fenómenos de transporte además de términos debidos a la radiación. Este último obliga a resolver conjuntamente las ecuaciones hidrodinámicas con las de equilibrio estadístico y de transporte radiativo, pero en éstas últimas sólo se consideran las frecuencias relevantes.

Ejemplos de éste tipo de cálculos son los modelos de Mihalas (1972) y Kurucz (1974) para atmósferas de estrellas calientes y los de Heasley y Mihalas (1976) y Fontenla y Revira (1983) para prominencias solares. En aquellos trabajos se hacen hipótesis simplificativas bastante fuertes.

Cuando se intenta la evaluación de modelos para las atmósferas estelares se enfrenta casi siempre el obstáculo de que resulta necesario conocer los valores de los coeficientes de transporte en condiciones muy diferentes de las standard, y entonces se recurre a valores poco confiables y muchas veces incoherentes.

Una de los factores que diferencian las condiciones estelares de las standard, es el apartamiento del equilibrio termodinámico local (ETL) que tiene lugar en las atmósferas estelares pero no en la mayor parte de los casos standard.

Este apartamiento es usualmente llamado situación no-ETL, aunque una mejor designación es la de p-ETL como se explica en Fontenla (1983) y corresponde a la situación en que la distribución de la radiación se aparta fuertemente de la función de Planck, pero la distribución de las partículas es próxima a la de Maxwell. Pero no obedecer la radiación la ley de Planck, y ser las densidades moderadas, tampoco suele ser válida la distribución de Saha-Boltzmann.

En las ecuaciones hidrodinámicas pueden incluirse los fenómenos de transporte (difusivo, conductivo, etc.) a través de coeficientes de proporcionalidad que los vinculan con los gradientes de las cantidades macroscópicas que caracterizan la distribución (presión,

temperatura , velocidad media) de las partículas. Pero debe abandonarse toda consideración sobre equilibrio químico , que resulta reemplazada por las ecuaciones de equilibrio estadístico que acoplan el estado químico (o de excitación o ionización) con el campo de radiación, que en la mayoría de los casos es el factor determinante.

En esas ecuaciones hidrodinámicas , también existen términos equivalentes a los de transporte , que serían proporcionales al flujo de radiación. Los coeficientes correspondientes , han sido descriptos por ejemplo por Andersen (1976) pero en su mayoría no han sido aún bautizados y mucho menos calculados o medidos. En general , todos los coeficientes de transporte son sensibles a la intensidad medida del campo de radiación , y sólo a grandes densidades y bajas intensidades de radiación esos coeficientes se independizan de la radiación. Este último caso , es común en las condiciones standard pero no en las atmósferas estelares.

De lo dicho se ve la gran importancia que tiene la determinación de los coeficientes de transporte en condiciones de p-ETL , ya que aunque muchos pueden ser medidos en laboratorio , esas mediciones requerirían el desarrollo de muy costosos equipos con esa única utilidad. Y por otra parte , de las escasas cálculas de algunos de esos coeficientes que existen , ninguna cubre bien el range de densidades y temperaturas que se encuentra en astrofísica.

En otro orden de cosas , cuando se analizan estrates de las atmósferas estelares , surgen problemas con la suposición de que los fenómenos de transporte son proporcionales a los gradientes de los parámetros macroscópicos. Estos problemas se pueden sintetizar en la llamada "saturación" o "limitación" de los flujos y corresponde a situaciones en las que el apartamiento de la distribución de las partículas respecto a la función de Maxwell comienza a ser importante.

El fenómeno de saturación de flujos es observado en condiciones de laboratorio en los experimentos de compresión de microesferas con láseres potentes (Max , 1981 ; White 1977 ; Gray (1977). También tiene importancia en las fulguraciones solares (Machado 1985).

Y aún mas , como muestra de trabajo de Reussel-Dupree (1980) existen casos en que aún cuando el apartamiento de la función de distribución de las partículas respecto a la función de Maxwell es pequeño a bajas velocidades , y no afecta directamente a los coeficientes de transporte de las ecuaciones hidrodinámicas , a altas velocidades el apartamiento es grande y afecta fuertemente las ecuaciones de equilibrio estadístico. Este fenómeno puede producirse en las abruptas regiones de transición como la de cromósfera a corona. Otra situación posible que está conectada con la "saturación" de los flujos , es la que puede darse (Fentonla 1983) en los vientos estelares , en los cuales ciertas especies de partículas pueden apartarse fuertemente de la distribución de Maxwell , debido a la gran magnitud del flujo de radiación. El problema de "saturación" del flujo conductivo en casos de laboratorio ha sido tratado por Shvarts (1981) en forma elemental , y mas rigurosamente por Campbell (1984) y Luciani et al (1985).

Es de importancia entonces , evaluar el range de validez de la hipótesis de coeficientes de transporte y , en los casos en que sea posible , al menos estimar los valores de flujo "saturado".

Por éstos motivos he desarrollado un método que permite evaluar los principales coeficientes de transporte en las condiciones comunes en las atmósferas estelares , así como también estimar los límites de validez de esos coeficientes y estimar en forma primitiva , los valores de saturación de los flujos y los límites de validez de la hipótesis p-ETL.

El método puede extenderse a condiciones mas complejas , e inclusive

a calcular los valores de flujos "saturados" con mayor precisión. Pero en ésta aplicación, la disponibilidad de recursos de computación me obligó a reducir el cálculo a un caso unidimensional, excluyendo así los coeficientes de conductividad y difusión transversales en presencia de campos magnéticos, y la viscosidad transversal. También por el mismo motivo, debió reducirse la cantidad de especies de partículas consideradas al mínimo indispensable para emular el material que constituye las atmósferas estelares.

En este trabajo se tratará de establecer los valores numéricos antedichos para una grilla de valores de los parámetros macroscópicos que cubra las necesidades usuales en el cálculo de modelos de las atmósferas estelares.

CAPITULO I

ANTECEDENTES

Antecedentes

La definición de los fenómenos de transporte en gases se trata en varios textos de mediados de siglo en el contexto del equilibrio termodinámico y los apartamientos del mismo, por una parte, y en forma fenomenológica por otra parte.

En los textos de mecánica estadística en que se describe la teoría del equilibrio termodinámico y el teorema H de Boltzmann, en ocasiones se menciona la relación entre los fenómenos de transporte y la relajación de un sistema próximo al equilibrio termodinámico. Este es el enfoque de Kube (1959) en el cual se dan definiciones de algunos coeficientes de transporte. En estos trabajos, se hace hincapié generalmente en las implicaciones teóricas de los fenómenos de transporte, y no en el cálculo o en las consecuencias prácticas.

Por otro lado, en otros casos se presentan coeficientes fenomenológicos que a partir de una teoría cinética muy elemental permiten el cálculo de esos fenómenos de transporte. Dos de los métodos usuales de éste tipo son las teorías de libre camino medio y la de intervalo medio entre colisiones. En ésta línea se desarrollan las primeras partes de los libros de Present (1958) y del de Chapman y Cowling (primera edición 1939, tercera edición 1970), en adelante mencionado como ChC.

A partir de esos cálculos elementales, otros más complejos y de mediciones, se elaboraron modelos para la interacción de moléculas como puede verse en el último capítulo del libro de Present.

Estos trabajos condujeron a potenciales intermoleculares como por ejemplo el de Lennard-Jones (1924), cuya base más firme es la experimental. Los cálculos son generalmente correspondientes a las condiciones de temperatura y densidad habituales (condiciones standard) y fueron hechos para la difusión, viscosidad y conductividad térmica de variedad de gases y mezclas.

Tanto en éstos trabajos de inspiración aplicada, como en muchos de los más teóricos de esa época, se consideraban solamente las interacciones

nes elásticas , binarias , con el término de colisiones de Boltzmann ; no se tenía en cuenta la radiación de ninguna manera y las interacciones eran de corto alcance (con potenciales de interacción de variación mas rápida que $1/r$).

En el Capítulo 11 de ChC se trata el problema de moléculas con grados de libertad internas y por lo tanto se tratan las colisiones inelásticas, y en él se citan trabajos de la década del 60. Este , sin embargo se refiere esencialmente a la influencia de los modos rotacionales y no constituye un planteo general , además tampoco tiene en cuenta efectos cuánticos y plantea modelos moleculares poco realistas. La consideración cuántica de los grados internos de libertad se menciona en el Capítulo 17 de ChC con escaso detalle.

Entre los modelos mas usados contemporáneamente , pueden mencionarse:

- a) El gas de esferas rígidas : A veces llamado de "bolas de billar", o sea de partículas que interactúan como esferas rígidas;
- b) El gas de dipolos : moléculas con potencial de interacción atractivo que varía como r^{-6} ;
- c) El gas de Lennard-Jones : con un potencial de interacción de la forma $V \propto (c/r)^{12} - (d/r)^6$ que corresponde mejor a moléculas no-polares. Fue propuesto por Lennard-Jones (1924) ;
- d) El gas de Maxwell : con un potencial de interacción repulsivo $V \propto r^{-5}$ que fue usado porque con él pueden obtenerse expresiones analíticas para los coeficientes de transporte. Este modelo fué propuesto por Maxwell en (1867) ;
- e) El gas de Lorentz : es un modelo de gas compuesto por dos especies de partículas , una de las cuales tiene masa mucho mayor que la otra , y donde se pueden despreciar las colisiones entre las partículas de pequeña masa. Modelo propuesto por Lorentz en 1905.

Como se advierte fácilmente , todos éstos modelos moleculares ,

proponen importantes simplificaciones para las interacciones entre partículas , pero no son muy realistas . Por éste , el relativo éxito que se obtiene usándolas , en la predicción de la dependencia de los distintos coeficientes con la temperatura , y de la relación entre esos coeficientes , debe atribuirse a la escasa sensibilidad de esos valores respecto al detalle de la interacción.

En lo referente a las interacciones entre partículas cargadas , con potencial coulombiano de interacción , es conocido el problema de que por ser este potencial de largo alcance , por una parte la sección eficaz total de interacción diverge , y por otra se vuelven importantes las interacciones simultáneas entre numerosas partículas.

En éstos gases ionizados , conocidos como plasmas , sin embargo existen mecanismos de apantallamiento de la interacción que consisten en efectos colectivos , o sea comportamiento conjunto de un gran número de partículas. El fenómeno de apantallamiento consiste en una correlación espacial entre las distribuciones espaciales de las partículas de cargas opuestas que lleva a reducir el alcance efectivo de la interacción binaria a una distancia característica (la longitud de Debye) , éste mecanismo fue propuesto por Debye (1923).

Pero éste no es el único efecto colectivo , también éste comportamiento lleva a la existencia de ondas de plasma y a la posible interacción de partículas con las pantallas de otras partículas cargadas . Esa última interacción es llamada interacción partícula-onda . Una descripción cualitativa de los principales fenómenos colectivos puede verse en Ichimaru (1970), y en el libro de De Witt (1960) se calculan y comparan las interacciones binarias y las de onda-partícula en plasmas.

El apantallamiento de la interacción lleva a una reducción del alcance de la interacción y a una sección eficaz finita.

En la aproximación seguida por Liboff (1959) , se plantea un potencial de interacción modificado por el efecto de la "nube" de partículas de carga opuesta que rodea a cada una de las que interactúan , el cual contiene además de r^{-1} un factor exponencial.

Otra aproximación es la de asumir un potencial de interacción coulombiano y simplemente "cortar" los procesos de interacción cuando la distancia entre partículas excede la de Debye .

Si bien el primer procedimiento parece más correcto , a primera vista un análisis mas detallado permite advertir que el potencial de interacción allí planteado no corresponde a la interacción de dos partículas sino a la de dos partículas y sus dos "nubes" , mientras que en el caso del "corte" se está utilizando el potencial binario. La cuestión se trata en el libro de De Witt (pag 295) y la respuesta correcta es que debe analizarse la cuestión desde el punto de vista de las ecuaciones BBGKY, James J. Duderstadt y William R. Martin, (1979).

De cualquier manera , éste problema no tiene gran trascendencia para mi trabajo ya que de acuerdo a lo mencionado por De Witt los resultados usando el potencial modificado y el "corte" son similares.

Sin embargo , existe además otro problema que aparece en el caso de los plasmas y es que las interacciones que implican pequeñas desviaciones de las partículas (o sea muy pequeño intercambio de energía) son mucho mas frecuentes que las que corresponden a desviaciones apreciables y por lo tanto la forma del término de colisiones de Boltzman no es apropiada pues requiere la evaluación de una diferencia pequeña entre dos números grandes . Esto fué advertido por Landshoff (1951) (Ch-C , 172) y corresponde a las hipótesis del término de colisiones de Fokker-Planck , camino ya seguido por Landau (1936) (Ch-C,401) , quien obtuvo una expresión del término de colisiones entre partículas cargadas de la forma de Fokker- Planck , que contiene derivadas en lugar de diferencias.

Aún con la expresión de Landau del término de colisiones , se mantiene el problema de la divergencia de los coeficientes para la interacción coulombiana , y fueron propuestos varios modos de "corte", y el actualmente aceptado es el ya mencionado.

Una variante del término de colisiones de Fokker- Planck es la que utiliza los potenciales introducidos por Rosenbluth (1957) (Ch-C, 402) pero éste no resulta ventajoso de acuerdo a Chapman y Cowling .

Otra expresión del término de colisiones que debe mencionarse es la de Lenard- Balescu (1960) que implica una transformación de Fourier de las ecuaciones electrostáticas , y por lo tanto , da cuenta de todos los efectos , binarios y colectivos .

Se puede derivar ésta expresión de las ecuaciones BBGKY pero su aplicación al cálculo de fenómenos de transporte no fué hecha aún . La expresión puede verse en el libro de Balescu , pag 642, y sería apta para analizar la inateracción de partícula-onda , pero de incluirse ésa interacción debería considerarse también la dinámica de las ondas de plasma y las interacciones onda-onda.

En mi trabajo utilizaré ambas fórmulas , la de Boltzmann y la de Fokker-Planck en la forma de Landau , así como otra forma del término de Fokker-Planck para las colisiones electrón-átomo , que también producen escasa variación en la velocidad de los átomos.

En relación con los métodos utilizados para hallar los coeficientes de transporte utilizando las ecuaciones cinéticas ,un antecedente es el método de Maxwell-Chapman (1917) que se detalla en el libro de Present (pag 204) . En él se expresa el término de colisiones linealizado en el entorno de una distribución maxwelliana , y se multiplica por una cantidad que selecciona los diferentes coeficientes de transporte.

El método utilizado con mayor frecuencia para el cálculo de los coeficientes de transporte es el de Chapman y Enskog (CHE) que se detalla en el libro de Chapman y Cowling (1939) (pag 110) . En éste trabajo

se expanden también las funciones de distribución en un entorno de la distribución maxwelliana, pero ésta expansión se hace en una forma particular , junto con el término de colisiones.

Este método contiene en realidad varias suposiciones sobre la convergencia de los desarrollos y el hecho de que las perturbaciones en las distribuciones son función solo de parámetros locales como los gradientes de los parámetros macroscópicos.

El método CHE fué extensamente utilizado en los años 60 para calcular los coeficientes de difusión , viscosidad y conductividad térmica en gases neutros en condiciones de presión y temperatura usuales , en los cuales las partículas son moléculas o átomos de gases raros , y las fuerzas de interacción son generalmente las de Van der Wals que corresponden a potenciales con una parte atractiva y otra repulsiva. No citaré trabajos en ésta línea por no ser de interés para esta tesis, pero sí conviene aclarar que los coeficientes obtenidos y las relaciones entre ellos coinciden con los experimentos dentro del error de medición, aunque por supuesto en los potenciales de interacción siempre existen parámetros de ajuste .

Otros trabajos que constituyen hitos de importancia en el tema son los de Cohen , Spitzer y Routly (1950 , CSR) y Spitzer y Harm (1953 , SH) . Estos trabajos se refieren a los coeficientes de transporte en gases ionizados , para los cuales (de acuerdo a ellos) el método CHE no es muy adecuado por ser las interacciones coulombianas. En éstos trabajos se emplea una fórmula para el término de colisiones , desarrollada previamente por Chandrasekhar (1943 , pag 1 CSR) , que es de la forma de Fokker-Planck y se utiliza el método de "corte". En el primero de esos trabajos se desprecia una parte del término de colisiones que en realidad es de gran importancia , y se adapta una forma para la función de distribución $f = f_0 (1 + \mathcal{D}\mu)$ donde f_0 es la función de Maxwell , μ el coseno del ángulo entre la dirección

considerada y la del gradiente de las variables macroscópicas y D una función de la velocidad de las partículas . En el trabajo CSR se plantea la ecuación cinética , y de ella se deriva (despreciando términos cuadráticos en D) una ecuación diferencial para D , se resuelve ésta con condiciones de contorno apropiadas y se encuentran los valores de la conductividad eléctrica (a corriente continua) integrando adecuadamente la distribución para un gas de electrones e iones de carga Z relativa a la del electrón .

En el trabajo SH , se toma en cuenta el término despreciado en CSR , pero por lo demás , se aplica el mismo método para calcular las conductividades eléctrica y térmica . Como se aclara en el trabajo se obtienen valores para los coeficientes de conductividad eléctrica y térmica coincidentes con los obtenidos con el método CHE a cuarto orden , sin embargo la información es mas detallada , pues se conoce además la forma específica de la función D .

Los valores de conductividad térmica y eléctrica (a corriente continua , cc.) que se utilizan en el cálculo de modelos en astrofísica suelen tomarse de fórmulas que aproximan los resultados de SH , (Allen 1962) y aunque Braginskii (1965) recalculó esos coeficientes por el método CHE y calculó los de viscosidad , sus resultados están en muy buen acuerdo con los de SH. A partir de éstos resultados se obtiene la variación con la temperatura de $T^{3/2}$ para la conductividad eléctrica y la viscosidad y $T^{5/2}$ para la conductividad térmica de los gases completamente ionizados , que coincide con resultados experimentales y las expresiones pueden encontrarse en Spitzer (1962).

Sin embargo , es frecuente en astrofísica el caso en que se encuentra un gas de hidrógeno parcialmente ionizado , éste caso fué tratado por Devoto (1966) , donde se presentan las definiciones de los coeficientes de transporte , y Devoto (1968) donde se calculan los coeficientes de difusión ambipolar y los antes mencionados en el

contexto del método CHE , pero incluyendo para las colisiones entre partículas cargada. la forma del término de colisiones integrado de Williams y De Witt (1968).

En el trabajo de Devoto (1968) (DE) se muestran los valores de los coeficientes para distintas temperaturas en el rango de los valores usuales en astrofísica , pero los cálculos fueron hechos para presiones alrededor de 1 atmósfera y en condiciones de ETL , por lo cual esos números no resultan útiles para las atmósferas estelares , aunque son a veces citados como ejemplo de las fuertes variaciones en los coeficientes de transporte que se operan en gases parcialmente ionizados , respecto a los valores correspondientes dados por las fórmulas de Spitzer ; por ejemplo , la conductividad eléctrica a 10^4 °K y 1 atm calculada por Devoto es aproximadamente 60 veces mayor que la de la fórmula de Spitzer.

Hay además otras dos razones que hacen que sea incierta la relación entre los valores dados por Devoto , y los valores reales de los coeficientes de transporte . La primera de ellas , es que los cálculos de Devoto fueron hechos para ciertos potenciales de interacción que determinan las secciones eficaces de colision con átomos , éstos potenciales son aproximaciones bastante crudas , y actualmente se dispone de valores mucho mas confiables de las secciones eficaces de colision , obtenidas por análisis cuánticos de expansiones en ondas parciales o aún por otros métodos , empleando las funciones de onda conocidas . Si bien esas secciones eficaces no pueden medirse en laboratorio , las que resultan de aplicar esos métodos a altas energías están de acuerdo con observaciones . Un ejemplo de los errores es el valor de las secciones eficaces para las colisiones entre átomos de hidrógeno , que según el trabajo de Devoto son de alrededor de 10 Å^2 y según el libro de Massey (1971) , calculadas con potenciales mas realistas del orden de 70 Å^2 , o mayor . El segundo problema con esos cálculos es que en ellos , no se tiene en

cuenta la radiación y ciertamente no está claro en ese trabajo si se toman o no en cuenta ni de qué manera los procesos de ionización y recombinación, aunque a las altas densidades involucradas, debería tenerse en cuenta los procesos colisionales (de tres partículas) de ionización, y la recombinación dielectrónica y podrían despreciarse probablemente los procesos radiativos.

En otro orden de cosas, existe en la actualidad abundante evidencia de las limitaciones que posee la teoría de los coeficientes de transporte, en esa línea podemos mencionar en primer lugar el trabajo de Dreicer (1959).

Dreicer presenta el fenómeno de "runaway" que consiste en la aceleración de las partículas que ocurre cuando se aplica un campo eléctrico constante a un plasma, que supera un valor crítico E_c . En ese caso las partículas con cualquier velocidad inicial experimentan una aceleración siempre mayor que cero ("runaway") y conducen a la imposibilidad de un estado estacionario. En cambio para campos menores que E_c las partículas con velocidad cero se acelerarían monótonamente hasta una velocidad terminal, y las partículas con suficiente velocidad inicial experimentarían el fenómeno de "runaway". Sin embargo, aún en este caso de pequeños campos, el efecto Joule calentaría las partículas que luego también experimentarían el fenómeno de "runaway".

La teoría de efectos colectivos en plasmas, ha modificado en gran parte la imagen del fenómeno descrito por Dreicer, ya que ha sido comprobado experimentalmente que el fenómeno de "runaway" provoca modos de oscilación colectiva que alteran totalmente los fenómenos previstos por Dreicer, como puede verse en K. Papadopoulos, (1977).

Pero de cualquier manera debe rescatarse de éste trabajo el que, a partir de un análisis mas detallado de las ecuaciones cinéticas, se obtienen resultados que invalidan las hipótesis básicas de los coeficientes de transporte cuando los campos aplicados o los gradientes

de parámetros macroscópicos exceden ciertos valores críticos.

Otro trabajo de gran importancia en relación con éste problema es el de Svarts , Delecttrez , Mc Crory y Verdon (1981) . En ese trabajo (SDMV) se muestra que las soluciones de las ecuaciones cinéticas con la hipótesis de pequeñas perturbaciones llevan a la contradicción de que a partir de cierta velocidad la perturbación en la distribución de las partículas no es pequeña e incluso a partir de cierta velocidad (v_c) superaría el valor de la distribución no perturbada . Cuando esa velocidad crítica v_c es cercana a la velocidad térmica , gran parte de las partículas no cumplen la aproximación de pequeñas perturbaciones y por lo tanto , pueden esperarse importantes reducciones en los flujos respecto a la teoría usual de los coeficientes de transporte . En ese trabajo los autores proponen un método de corte , para obtener factores de reducción del flujo de energía correspondiente a la conducción térmica , de manera de obtener valores consistentes con los experimentos de calentamiento de plasmas con láser.

Este método de corte es similar al que se utilizará en esta tesis.

Otro trabajo mas reciente y riguroso en esta línea es el de Campbell (1984) . En él se descompone la distribución de las partículas en dos componentes . Una de ellas , la componente lenta , tiene un camino libre medio pequeño frente a la extensión de la región en que se puede suponer constante el gradiente de temperatura (éstas partículas constituyen la componente térmica) . La otra componente corresponde a las partículas para las cuales el camino libre medio es comparable con la extensión de la región mencionada , éstas son las partículas mas rápidas y se denominan componente "free streaming" o no térmica . Este autor elabora dos aproximaciones : una para la componente térmica y otra para la no térmica . En el primer caso , por un método análogo al de SH y usando resultados de Dreicer , se halla una expresión para la

perturbación de la función de distribución que nunca supera el valor de la función no perturbada , y que en el límite de bajas velocidades tiende al valor de SH ; de esta manera el trabajo contiene los resultados de SH y los de SDMV. Para las partículas no-térmicas , se resuelve una ecuación de transporte con condiciones de contorno correspondientes a problemas específicos.

Otro trabajo que debemos mencionar es el de Rousell-Dupree (1980) en el cual se analiza el problema de la región de transición cromósfera-corona en el sol , se evalúa la conducción térmica y se llega a la conclusión de que para ciertos modelos de esa región , el flujo de calor se reduce sólo en un 30 % respecto el previsto por el coeficiente de Spitzer. Esta reducción no es muy importante para los astrofísicos , pero debe tenerse en cuenta que en los casos de fulguraciones solares , la reducción puede ser bastante mayor . Además , en ese trabajo , se calcula la distribución de la componente no-térmica (en el sentido antes usado) y se obtienen valores para la "cola" no-térmica de la distribución que alteran fuertemente la ionización de los elementos que producen las líneas en esa región y , por lo tanto, producen una delocalización de la formación de los diferentes iones que tiene consecuencias importantísimas en la elaboración de modelos semiempíricos.

En el trabajo de Campbell y el de Luciani et al se ataca el problema de los fuertes gradientes de temperatura en el caso de la compresión por bombardeo con laser , y en el primero de esos artículos se obtienen factores de limitación del flujo conductivo en forma mas elaborada que los obtenidos por Shvarts et al . El segundo de los trabajos mencionados, contiene un tratamiento mas completo del problema , y da una expresión analítica para la limitación del flujo conductivo , pero además , sugiere un procedimiento para calcular otro efecto fundamental que es la delocalización del flujo de calor por causa de los electrones situados en la componente no-térmica de la distribución.

Finalmente , en lo que respecta a éste tema , debo mencionar el programa de cálculo "Elendif" que fué desarrollado y se utiliza en el Jila ("Joint Institute for Laboratory Astrophysics") y el Lawrence

Livermore Laboratory. Este programa de cálculo numérico permite calcular las funciones de distribución de los electrones y en particular las "colas" no térmicas utilizando formulas especialmente desarrolladas para los términos de colisiones.

Este programa de cálculo es usado en esos centros para evaluar la distribución de electrones en relación con experimentos específicos.

El tercer tema relacionado con este trabajo , es el de los coeficientes de transporte cuando es importante el campo de radiación.

En primer lugar se puede citar el trabajo de Ehlers (1977) , donde se plantean las ecuaciones cinéticas en forma relativista y compatible con el caso cuántico , inelástico y aun cuando una de las partículas involucradas es un fotón. Precisamente el último caso , constituye uno de los ejemplos que allí se plantean.

Este formalismo , fué ampliado por Fontenla (1983) incorporando los términos de Fokker-Planck y la separación en partes simétrica y antisimétrica . Allí se presenta también aunque en forma mas general , el formalismo que se aplicará en éste trabajo .

Una presentación de la definición de los coeficientes de transporte que vinculan los flujos con las variables del campo de radiación, se encuentra en Anderson (1976) y otra en Verga (1982) . En estos trabajos, se analiza el problema , desde el punto de vista del equilibrio termodinámico , la entropía y el teorema H de Boltzmann , resultando la caracterización de varios coeficientes , para los cuales no existe denominación , pero que bautizaremos y calcularemos cuando sea posible aquí definirlos.

CAPITULO II

FUNDAMENTACION

CAPITULO II

2.1 Definiciones

En el presente trabajo no entraremos en los detalles que se refieren a los fundamentos de la mecánica estadística, para lo cual puede referirse al libro de Balescu (Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics , 1975 , John Wiley & Sons) que contiene una justificación detallada desde el punto de vista clásico y cuántico de la mecánica estadística.

En la presente aproximación trataremos con gases de partículas e incorporaremos luego las consideraciones sobre partículas con carga eléctrica y fotones del campo de radiación.

La noción de gas , implica la de una gran cantidad de partículas individuales , que pueden ser moléculas o átomos , y que ocupan un volumen físico y en las cuales las interacciones son relativamente pequeñas. Esto significa que para la evaluación de los parámetros macroscópicos , puede despreciarse las interacciones entre las partículas y considerarlas como partículas libres. La interacción entre las partículas , tendría el efecto de una pequeña corrección en esas cantidades y frecuentemente es mencionada como una característica de los gases reales que los diferencia de los "ideales".

Desde el punto de vista del equilibrio termodinámico entonces, la interacción entre las partículas , produce solamente pequeñas correcciones en los parámetros macroscópicos. Sin embargo desde el punto de vista de los apartamientos del equilibrio termodinámico, esa interacción es de fundamental importancia, pues es a través de ella que el gas tiende al equilibrio , y de no existir , carecería de sentido hablar de fenómenos de transporte y también de equilibrio termodinámico.

En éste contexto entonces , se adoptan las definiciones usuales , en mecánica estadística , para las funciones de distribución y siendo las partículas fundamentalmente libres , puede en primera aproximación

despreciarse las correlaciones y expresar todas las funciones de distribución de varias (S) partículas como producto de distribuciones individuales $f_s = f_1^s$, por lo tanto se pondrá atención solamente en la función de distribución de una partícula que en adelante se abreviará como f .

La función de distribución f se define entonces en el espacio de fase \vec{x}, \vec{p} usual en mecánica clásica. Como se verá mas adelante, para el presente trabajo no es necesario entrar en consideraciones de mecánica cuántica excepto en la utilización de algunos de sus resultados en lo que respecta a las interacciones.

En este contexto, la función de distribución se corresponde entonces con la probabilidad de encontrar una partícula en un elemento de volumen del espacio de fase, centrado en el punto (\vec{x}, \vec{p}) . Esta acción puede ampliarse teniendo en cuenta el tiempo de manera compatible con la relatividad especial definiendo el espacio de fase como el de $(\vec{x}, ict, \vec{p}, i\frac{E}{c})$ en éste espacio, a cada partícula correspondería una trayectoria u órbita y podría definirse la función de distribución como la probabilidad de que una trayectoria cruce un elemento de ese espacio de fase.

Esta probabilidad, es por supuesto entendida en el sentido del "ensemble microcanónico".

En este planteo, y asumiendo que las interacciones entre partículas se producen solamente cuando las partículas se encuentran próximas entre sí, es decir cuando sus trayectorias se acercan suficientemente en algún punto del espacio-tiempo (proyección sobre los 4 primeros ejes del espacio de fase). En las condiciones de un gas diluido, esas interacciones son raras, el volumen del espacio-tiempo ocupado por ellas es despreciable, y es aún mucho menos probable la aproximación entre mas de dos partículas a distancias que permitan la interacción efectiva. Por ésto, se despreciarán aquí las interacciones de varias partículas y sólo se tendrán en cuenta las binarias, o sea las que involucran dos partículas, aproximación que es válida en el caso de las

atmósferas estelares aunque no en los interiores estelares. Ya que en éste trabajo sólo se consideran fotones de longitudes de onda en el rango óptico o menores , que son los relevantes en el problema de la construcción de modelos en astrofísica , éstos pueden tratarse con la aproximación de gas, con la salvedad de que , como se dijo en la introducción , esta especie de partículas no interactúan entre sí.

Los gases que nos interesan son en general no-relativistas y por lo tanto podría hacerse todo el planteo en forma clásica , pero para incluir a los fotones en el mismo formalismo se seguirá el planteo relativista de Ehlers (1977) y luego se harán las aproximaciones del caso.

La descripción que antecede , corresponde bien a un gas diluido , pero , en principio excluiría a los gases ionizados , pues el rango de las fuerzas de interacción entre las partículas cargadas , es extremadamente grande en principio. Sin embargo , en ciertas condiciones conocidas como "de plasma" , es posible una descripción en gran parte análoga.

A fin de caracterizar estas condiciones recurriremos a la cadena de ecuaciones BBGKY (de Bogoliubov , Born y Green y Kirkwood , 1946) que relacionan las funciones de distribución de varias partículas y usaremos la idea de que las fuerzas coulombianas influyen en las distribuciones , creando una correlación espacial entre ellas , de manera que alrededor de cada una , existe una distribución espacial de carga dada , pero se supondrá que las velocidades de las partículas no se encuentran correlacionadas (hipótesis ergódica o de caos molecular)

La cadena de ecuaciones es

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \sum_{i=1}^s \left\{ \frac{\vec{p}_i}{m} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{x}_i} + \left(\vec{G}_i + \sum_{j=1}^s \vec{X}_{ij} \right) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{p}_i} \right\} =$$

$$= - \int d\vec{x}_{s+1} \int d\vec{p}_{s+1} \sum_{i=1}^s \vec{X}_{i(s+1)} \cdot \frac{\partial f_{s+1}}{\partial \vec{p}_i}$$

donde \vec{G}_i es la aceleración de la partícula i debida a las fuerzas exteriores y \vec{X}_{ij} es la debida a la fuerza que ejerce la partícula j .

La hipótesis de caos molecular se expresa como

$$f_s = f_1(\vec{p}_1) f_1(\vec{p}_2) \dots f_1(\vec{p}_s) g_s(x_1, x_2, \dots, x_s)$$

o sea que se supone que existe correlación sólo en las coordenadas espaciales de las partículas pero no en las coordenadas de impulso.

Esto puede inducirse a partir de la solución de las ecuaciones BBGKY para S partículas, suponiendo la f_1 dada por la fórmula de Maxwell.

Suponiendo Homogéneo el gas ($\frac{\partial f_s}{\partial \vec{x}_i} = 0$) y nulas las fuerzas externas ($\vec{G}_i = 0$) y denominando h_{12} la correlación entre la partícula 1 y la 2 se puede escribir siendo

$$g_{12\dots s} = g_s(x_1, x_2, \dots, x_s)$$

$$g_{12} = 1 + h_{12}$$

$$g_{123} = 1 + h_{12} + h_{13} + h_{23} + h_{123}$$

normalizada siendo $1 = \int g_s d\vec{x}_1 \dots d\vec{x}_s$ y siendo n_0 la densidad de electrones y si se hace la hipótesis de que las correlaciones son pequeñas, es $h_{12} \ll 1$ y $h_{123} \ll h_{12}$, entonces de la ecuación BBGKY para $s=2$

$$\frac{\partial h_{12}}{\partial x_1} + \frac{1}{\beta T} \frac{\partial \phi_{12}}{\partial x_1} = - \frac{n_0}{\beta T} \int d x_3 \frac{\partial \phi_{13}}{\partial x_1} (1 + h_{12} + h_{13} + h_{23})$$

con β la constante de Boltzman, T la temperatura y ϕ_{12} el potencial de la interacción entre las partículas 1 y 2. Por la paridad del integrando, en la integral del miembro derecho se anulan los dos primeros sumandos, también puede verse que

$$\int d x_3 \frac{\partial \phi_{13}}{\partial x_1} h_{13} = 0 \text{ porque como antes } \phi_{13} \text{ es función}$$

sólo de $(\vec{x}_3 - \vec{x}_1) = \vec{r}_{31}$, de manera que resulta

$$\frac{\partial h_{12}}{\partial x_1} + \frac{1}{\beta T} \frac{\partial \phi_{12}}{\partial x_1} = - \frac{n_0}{\beta T} \int d x_3 \frac{\partial \phi_{13}}{\partial x_1} h_{23}$$

y por otra parte, siendo el potencial de interacción coulombiano y e la carga del electrón, es

$$\phi_{13} = \frac{e^2}{r_{13}} \quad \text{y} \quad \nabla^2 \phi_{13} = -4\pi e^2 \delta^3(\vec{r}_{13})$$

y por lo tanto queda, tomando divergencia de la ecuación anterior,

$$\nabla_{x_1}^2 h_{12} - \frac{4\pi e^2}{\beta T} \delta^3(\vec{r}_{12}) = \frac{4\pi e^2 n_0}{\beta T} \int d x_3 \delta^3(\vec{r}_{13}) h_{23}$$

o sea eliminando el subíndice (12)

$$\nabla^2 h = \frac{4\pi e^2}{\beta T} \delta^3(\vec{r}) + \frac{4\pi e^2 n_0}{\beta T} h$$

ésta ecuación diferencial, es ahora cerrada a causa de que se despreciaron las correlaciones de a tres partículas.

Se acostumbra definir la longitud de Debye l_D

$$\ell_D^2 = \frac{kT}{4\pi e^2 n_0}$$

y entonces la ecuación queda

$$\nabla^2 \ell = \frac{\delta^3(\vec{r})}{n_0 \ell_D^3} - \frac{\ell}{\ell_D^2}$$

expresando el laplaciano en coordenadas esféricas y para $r \neq 0$ queda

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\ell}{dr} \right) = \frac{\ell}{\ell_D^2}$$

que admite como solución

$$\ell(r) = -\frac{K}{r} e^{-\frac{r}{\ell_D}}$$

siendo K una constante de normalización.

Esta fórmula indica que si bien las fuerzas coulombianas son de gran rango de acción, bajo las suposiciones hechas, las correlaciones de dos partículas, tienen un rango dado por la longitud de Debye, a partir del cual se atenúan muy rápidamente.

Por otra parte, siguiendo un esquema similar pero para $S=1$ y usando la h_{12} ya calculada, se ve que resultaría una ecuación similar a la de Boltzman, pero en la cual, la fuerza incluiría no solo la externa, sino que además incluiría el valor de las que ejercen todas las partículas menos la considerada. Esta fuerza y el potencial correspondiente son los llamados autoconsistentes, y desde el punto de vista de las ecuaciones cinéticas cumple el mismo papel que las fuerzas externas. Sea entonces \vec{E} el campo autoconsistente. Es entonces

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \nabla f_1 + \vec{E} \cdot \nabla_p f_1 = - \int d^3x_2 \int d^3p_2 \vec{X}_{12} \cdot \nabla_p f_1 f_1 h =$$

$$= - \int \nabla_p f_1 h d^3x_2 \cdot \int d^3p_2 \vec{X}_{12} f_1$$

en esta expresión, el término de la derecha corresponde a colisiones, y puede reducirse a cualquiera de las formas standard si se separa f_1 en una parte que varía lentamente y otra que lo hace rápidamente

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial t} \right)_{\text{colis}} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \nabla f_1 \right)_{\text{lento}} + \vec{E} \cdot \nabla_p f_1 = - \left(\frac{\vec{p}}{m} \cdot \nabla f_1 \right)_{\text{rápido}} + \left(\int d^3x_2 \int d^3p_2 h f_1 \nabla_p f_1 \cdot \nabla p_{12} \right)$$

pero, por contener el factor h , el potencial efectivo de interacción resulta afectado por esa correlación que puede imaginarse como causando una nube de carga opuesta alrededor de cada carga, que apantalla a las partículas que se encuentran a distancias mayores que l_D . Es entonces por ello que l_D se considera como el alcance efectivo de la interacción coulombiana y se suele usar como parámetro de "corte" en los cálculos del término de colisiones.

Si en la ecuación anterior se desprecia el término de colisiones, se obtiene la ecuación de Vlasov que corresponde a plasmas en que la frecuencia de colisión es mucho menor que cualquier otra frecuencia característica.

De lo dicho surgen las condiciones de aplicabilidad del modelo, que pueden sintetizarse en dos, por una parte debe ser grande la cantidad de partículas contenidas en una esfera del radio de Debye ($n_0 l_D^3 \gg 1$) y por otra parte, la escala de variación de los parámetros macroscópicos (L) debe ser mucho mayor que la longitud de Debye ($L \gg l_D$) aunque la frecuencia de los fenómenos macroscópicos puede o no justificar la inclusión de colisiones en el modelo.

2.2 Ecuaciones cinéticas

De acuerdo con la relatividad especial , se puede plantear las definiciones

c = velocidad de la luz

m = masa de reposo de la partícula

i = unidad imaginaria ($\sqrt{-1}$)

v = velocidad de la partícula (módulo)

\vec{n} = dirección del movimiento de la partícula en el espacio
(versor unitario)

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{y} \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$$

\vec{x} = posición de la partícula en el espacio

entonces se puede definir el impulso y la energía

$$\vec{p} = \vec{n} \gamma \beta (m c) \quad ; \quad E = \gamma (m c^2)$$

y adoptando las definiciones de cuadrivectores , siendo la coordenadas en el espaciotiempo $\bar{x} = (\vec{x}, i c t)$, resultan los impulsos canónicos conjugados $\bar{p} = (\vec{p}, i \frac{E}{c})$ y siendo el Hamiltoniano $H = \frac{1}{2} \bar{p} \cdot \bar{p} + V (\vec{x})$ donde $V (\vec{x})$ es el potencial correspondiente a las fuerzas de las ecuaciones dinámicas , siendo f una función de las posiciones de las partículas en el espaciotiempo , y se puede definir el operador de Liouville , equivalente al conmutador con el Hamiltoniano. En este planteo no se considerarán las fuerzas proporcionales a la velocidad.

El operador de Liouville es usando la convención de Einstein de suma sobre índices repetidos , y los índices griegos del 1 al 4.

$$\mathcal{L} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial p_\alpha} = p_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + F_\alpha \frac{\partial}{\partial p_\alpha}$$

siendo F_α la fuerza.

Este operador de Liouville da la variación a lo largo de la trayectoria cuando se aplica a la función de distribución. Si la trayectoria corresponde a la de las partículas en el caso ideal en que no interactúan entre sí, esa variación debe equilibrarse con la debida a las colisiones que producen interrupciones o bruscos cambios de dirección en las trayectorias, de otro modo regulares. Si se parametriza la trayectoria y mejor aún la órbita en el espacio de fase en función de τ , el "tiempo propio", o sea el tiempo en el sistema en el cual la partícula está en reposo, y se excluye, de acuerdo a lo antedicho, de la fuerza, la debida a la interacción entre las partículas, se puede expresar

$$p_\alpha \frac{\delta f}{\delta x_\alpha} + F_\alpha \frac{\delta f}{\delta p_\alpha} = \frac{df}{d(\tau c)} = \tau \quad \text{c}$$

siendo p el módulo del impulso que de acuerdo a la definición de p resulta $p = i m c$

Esta fórmula, que en realidad sólo expresa la invariancia de la probabilidad de colisiones en distintos sistemas de coordenadas puede ser llevada a una forma mas explícita,

$$m \gamma \frac{\delta f}{\delta t} + \vec{p} \cdot \nabla f + \vec{F} \cdot \nabla_p f = m \frac{df}{d\tau} = \tau \quad \text{c}$$

adoptando la notación vectorial sobre los vectores de tres componentes, y ∇ es el gradiente habitual y ∇_p es el gradiente respecto a las coordenadas \vec{p} . Además se aplica la suposición $F_4 = 0$ que es buena aproximación en el caso presente, como podría deducirse por ejemplo para el campo gravitatorio, a partir de relatividad general.

O definiendo la aceleración $\vec{G} = \frac{1}{m\gamma} \vec{F}$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} + \beta \vec{n} \cdot \nabla f + \vec{G} \cdot \nabla_p f = \frac{1}{\gamma c} \frac{df}{d\tau} = \frac{c}{mc\gamma} = \xi$$

Esta ecuación es útil para el caso de partículas y fotones también ya que en ella la masa ha sido eliminada, y para fotones sería $m = 0$, $\beta = 1$ y $\vec{G} = 0$ en la presente aproximación. Como se ve, en el caso de los fotones el lado izquierdo corresponde a la habitual ecuación de transporte radiativo y por supuesto, en el lado derecho de la ecuación, sería $\gamma = \infty$ y el tiempo propio carece de sentido, de manera que ese término debido a las colisiones debería expresarse en términos de otro parámetro de la trayectoria, como podría ser el tiempo en el sistema de laboratorio, se verá mas adelante el término de colisiones, que se denominará

$$\dot{f} \equiv \frac{1}{\gamma c} \frac{df}{d\tau} = \xi$$

Para las partículas ésta es la habitual ecuación cinética, reemplazando la fórmula adecuada para el término de colisiones.

Para definir completamente la función de distribución, es necesario aclarar que como las órbitas de las partículas son curvas continuas si no se tienen en cuenta las colisiones, se puede definir f como la probabilidad de que una partícula esté contenida en un elemento de "volumen" en el espacio de fase, en ese caso, el elemento de "volumen" se podría definir como $\omega = \rho_\Sigma \sigma_\Sigma d\pi$ donde σ_Σ es un elemento de hipersuperficies en el espacio tiempo y $d\pi$ es un elemento de volumen del espacio de los impulsos. Una justificación geométrica de ésta forma de medida del "volumen" en el espacio de fase puede encontrarse en Ehlers (1977) pero se puede interpretar físicamente en términos de los flujos de partículas: sería \int_Σ el flujo promedio de partículas que cruzan una hipersuperficie Σ en el espacio-tiempo para cualquier impulso

$$J_{\Sigma} = \int_{\Sigma} f \omega = \int_{\Sigma} f p_{\alpha} u_{\alpha} d\pi$$

de aquí se ve que la densidad de flujo de partículas en el espacio-tiempo sería

$$j_{\alpha} = \int p_{\alpha} f d\pi$$

y sustituyendo \bar{p} se ve que es

$$\vec{j} = \int \vec{p} f d\pi$$

$$j_4 = \frac{i}{c} \int E f d\pi$$

para partículas de una masa dada, sin embargo, las cuatro componentes de \bar{p} no son independientes, por lo cual puede deducirse que el elemento $d\pi = \frac{c}{E} dp_x dp_y dp_z = \frac{c}{E} dp^3$, ésta deducción puede encontrarse también en Ehlers (1977) o Landau (19) y entonces es

$$\vec{j} = \int \vec{n} \beta f dp^3$$

$$j_4 = i \int f dp^3$$

Estas ecuaciones muestran que para partículas estas definiciones dan la usual función de distribución en el espacio de impulsos, y se puede definir a la cuarta componente, o sea la densidad de flujo respecto una superficie orientada según el eje temporal, como

$$j_4 = i n$$

siendo n la densidad en el sentido usual. Los factores c respecto a las definiciones usuales de densidad de flujo son solamente un problema de unidades y carecen de importancia.

Se ve también que éstas definiciones son compatibles para el caso de fotones poniendo

$$\vec{p} = \frac{h\nu}{c} \vec{n} \quad ; \quad E = h\nu$$

donde h es la constante de Planck y ν la frecuencia (una variable) , entonces en éste caso , se podría identificar $\gamma mc \equiv \frac{h\nu}{c}$ y seguir un esquema similar al anterior , debiendo en este caso definirse la densidad o frecuencia de colisiones a lo largo de la trayectoria , \mathcal{C} sin usar el tiempo propio sino , por ejemplo la distancia geométrica recorrida por el fotón , en el sistema de laboratorio

$$\mathcal{C} = \frac{h\nu}{c} \frac{df}{ds}$$

$$\mathcal{C} = \frac{df}{ds} = \frac{1}{c} \frac{df}{dt}$$

Para utilizar las formas mas habituales , trabajaremos entonces con el elemento de volumen d^3p (en lugar de $d\pi$) aunque realmente éste no es invariante relativista como $d\pi$. Se puede expresar , en coordenadas esféricas del espacio de impulsos

$$d^3p = (mc)^3 \gamma^5 \beta^2 d\beta d\mu d\varphi \quad \text{para partículas}$$

$$d^3p = \left(\frac{h}{c}\right)^3 \nu^2 d\nu d\mu d\varphi \quad \text{para fotones}$$

$$\text{siendo } \mu = \cos \theta$$

y entonces usaremos el espacio de fase habitual , y la extensión al caso de fotones .

Estos podrían llevarse a números de ocupación con los factores adecuados como se muestra en Fontenla (1983).

Se tienen entonces las ecuaciones cinéticas para partículas y para fotones , que para ser completadas requieren una formulación más explícita del término de colisiones .

La forma más usual es la de Boltzmann , la cual podría derivarse a partir de la consideración clásica o de la cuántica del proceso de interacción binaria pensando el fenómeno de interacción como un conjunto de eventos discretos e independientes desde el punto de

vista probabilístico , que ocurren en una región localizada del espacio y duran un tiempo pequeño ; en éstas condiciones , el efecto neto de la colisión sería un cambio brusco en el impulso de las partículas que interactúan.

Una manera de explicitar las condiciones que se exigen sería suponer que las fuerzas de interacción sólo son relevantes para distancia entre partículas menor que una distancia característica r_c (rango de las fuerzas) y que la distancia promedio entre las partículas es mucho mayor que r_c .

Entonces , para calcular el efecto de las colisiones , se tiene en cuenta que en el tiempo Δt , las partículas con velocidad $\frac{p}{m\delta}$ sufren colisiones con otras y cambian su velocidad o sea desaparecen de ese elemento de volumen del espacio de fase, y por otra parte , partículas con una velocidad diferente $\frac{p'}{m\delta}$ por colisiones con partículas de $\frac{p\delta}{m\delta}$ alteran su velocidad resultando con velocidad $\frac{p}{m\delta}$.

El primer proceso representa en el tiempo Δt una pérdida neta de partículas y el segundo una ganancia neta , la pérdida es una fracción proporcional de $f \equiv f(p)$ de manera que podría escribirse.

$$\xi = - \chi f + \eta$$

siendo χ la "pérdida" de partículas de impulso p y η su producción , ambas por unidad de tiempo.

Esta forma del término de colisiones , suele derivarse de planteos heurísticos para las ecuaciones de transporte radiativo como sucede en los primeros capítulos de los libros de Athay (1972) y Mihalas (1978) . Los mismos argumentos empleados en esos casos , pueden usarse para partículas.

Aplicando la hipótesis de colisiones binarias como eventos independientes , e introduciendo la hipótesis de debilitamiento de las correlaciones (caos molecular) es

$$\chi_A = \int R_{AB}^{CD} f_B d\mathbf{r}_B d\mathbf{r}_C d\mathbf{r}_D S^4(\Delta\vec{p})$$

siendo R_{AB}^{CD} la probabilidad de que una partícula A choque con una partícula B dando como resultado una partícula C y otra D, y siendo el factor $S^4(\Delta\vec{p})$ el que incorpora la ley de conservación del cuadri-impulso, pues

$$\Delta\vec{p} = (\vec{p}_A + \vec{p}_B) - (\vec{p}_C + \vec{p}_D)$$

Como se ve fácilmente, la condición $\Delta\vec{p}=0$ implica cuatro restricciones sobre los impulsos posibles de las partículas C y D, y como para cada uno hay tres variables independientes, resultan tan sólo dos variables que pueden elegirse arbitrariamente, y por la forma usual en que se consideran las colisiones, se asumen estas dos variables como las que definen la dirección del impulso de una de las partículas resultantes (sea la C) y quedan definidas las energías de ambas partículas C y D y la dirección de la D. Esto vale también para fotones.

En el caso de colisiones elásticas, es usual identificar como partícula C a la A luego del choque.

La probabilidad de transición R_{AB}^{CD} , en el esquema de las colisiones binarias, es proporcional al flujo de partículas A visto desde el sistema en el cual la partícula B está en reposo (cuando las partículas A inciden según el eje z éste sistema es el llamado "de laboratorio"), por lo cual es

$$R_{AB}^{CD} d\mathbf{r}_B d\mathbf{r}_C d\mathbf{r}_D S^4(\Delta\vec{p}) = \frac{P_{AB}}{\left(\frac{E_A}{c}\right)} \sigma d\varphi_C d\varphi_D d\mathbf{r}_B$$

donde $d\sigma = \sigma d\mu_C d\varphi_C$ tiene unidades de superficie y se conoce como sección eficaz diferencial y solo es función de las variables μ_C y φ_C que definen la dirección de la partícula C ($\mu_C = \cos \theta_C$) y de la velocidad relativa v_{AB} y es fácil comprobar que

$$\frac{P_{AB}}{\left(\frac{EA}{C}\right)} d\tau_B = \left(\frac{v_{AB}}{C}\right) dp_B^3$$

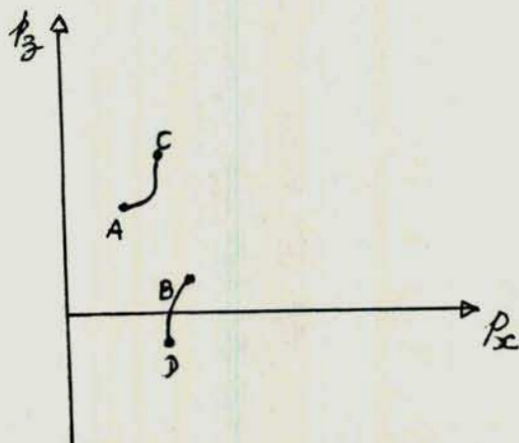
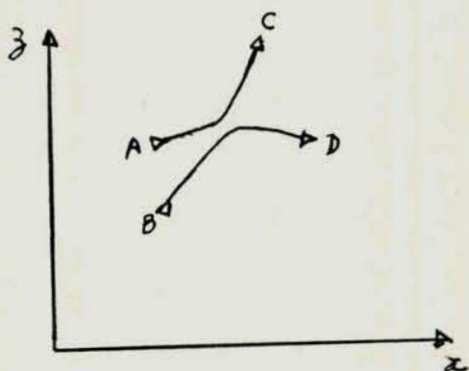
por lo cual resultaría

$$x_A = \int \left(\frac{v_{AB}}{C}\right) d\sigma f_B dp_B^3$$

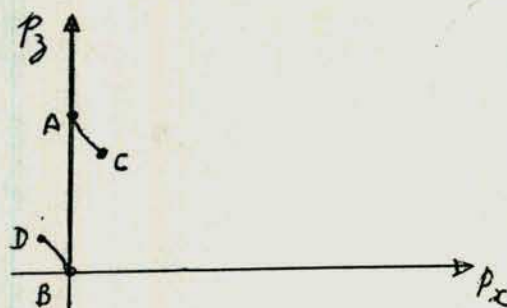
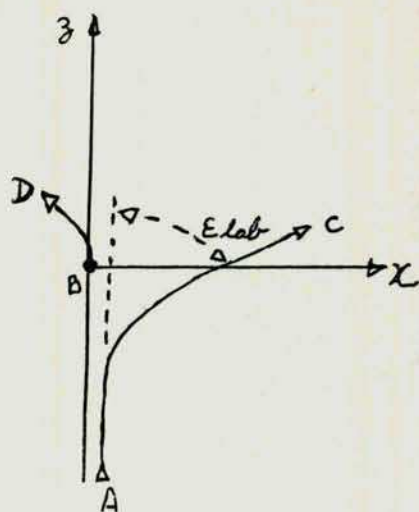
expresión que también es útil para fotones siendo en éste caso $v_{AB} = C$.

Graficando las trayectorias durante la colisión en distintos sistemas (el dibujo es descriptivo y no presenta los valores precisos) :

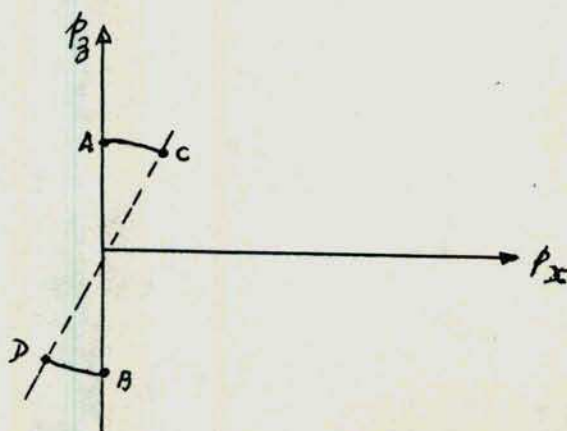
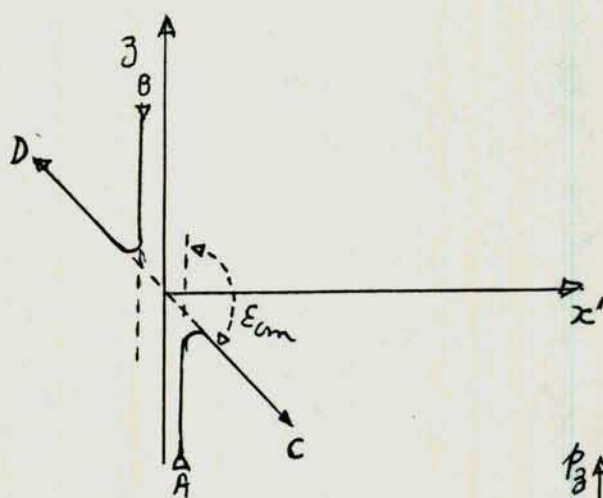
a) en el sistema del fluido



b) en el sistema de laboratorio



c) en el sistema centro de masa



Siempre puede hacerse una representación de éste tipo para partículas clásicas ya que las trayectorias son coplanares de acuerdo a la mecánica, en éste gráfico, se definen los ángulos de deflexión ε y ϕ' en los sistemas de laboratorio (lab) y centro de masa (cm). El ángulo ε se muestra en el gráfico y ϕ' es el ángulo entre el plano del dibujo y el del sistema de coordenadas del fluido χ , en general la sección eficaz diferencial es independiente de ϕ' pues hay simetría alrededor del eje z y se puede escribir

$$d\sigma = 2\pi \sigma \sin \varepsilon d\varepsilon$$

donde σ es una función de v_{AB} y ε y se puede particularizar en los sistemas centro de masa o laboratorio.

Para hallar una expresión para η lo más conveniente es utilizar la reversibilidad de la mecánica clásica que asegure que $R_{AB}^{CD} = R_{CD}^{AB}$ y por lo tanto resultarían eligiendo convenientemente las variables de integración

$$\eta_A = \int \left(\frac{v_{AB}}{c} \right) d\sigma f_c f_D dp_B^3$$

o sea que resultaría la fórmula de Boltzmann

$$\xi_A = \int \left(\frac{v_{AB}}{c} \right) d\sigma (f_c f_D - f_A f_B) dp_B^3$$

donde se entiende implícita una suma sobre las diferentes especies de partículas B, C y D posibles, pues ésta expresión también es válida para los casos no elásticos, donde las partículas C y D corresponderían a diferentes especies que las A y B.

Cuando alguna de las partículas involucradas es un fotón o en los casos de gases degenerados, es necesario modificar ésta expresión pues de acuerdo a la mecánica cuántica la probabilidad de transición no es solamente proporcional a las funciones de distribución de las partículas inicialmente presentes, sino también a los números de "desocupación" o complementos de las partículas emergentes,

Estos complementos se expresarían

$$\begin{aligned}\tilde{f}^A &= 1 + \tilde{f}_A && \text{para bosones} \\ \tilde{f}^A &= 1 - \tilde{f}_A && \text{para fermiones}\end{aligned}$$

donde los \tilde{f}_A son los números de ocupación que estarían dados por

$$\tilde{f} = \frac{h^3}{\omega} f$$

donde ω es el peso estadístico de las partículas (o sea la degeneración).
h es la constante de Planck. Para fotones es $\omega=2$ por las dos polarizaciones independientes posibles.

Entonces la expresión correspondiente sería

$$\xi_A = \int \left(\frac{v_{AB}}{c} \right) d\sigma \left(\tilde{f}_C \tilde{f}_D \tilde{f}^A \tilde{f}^B - \tilde{f}_A \tilde{f}_B \tilde{f}^C \tilde{f}^D \right) d\tilde{p}_B^3$$

donde en $d\tilde{p}_B^3$ se ha incluido el factor correspondiente a la normalización y es

$$d\tilde{p}_B^3 = \frac{\omega}{h^3} dp_B^3$$

En nuestro caso no nos ocuparemos de gases degenerados pero sí tendremos en cuenta los fotones correspondientes al continuo de Lyman para los cuales sin embargo, por ser las temperaturas de radiación T_R consideradas, relativamente pequeñas es $\frac{h\nu}{kT_R} \gg 1$ y puede asumirse también que $\tilde{f}^A = 1$ o sea despreciarse el proceso de emisión estimulada.

En este trabajo se usará por lo tanto la fórmula de Boltzman con

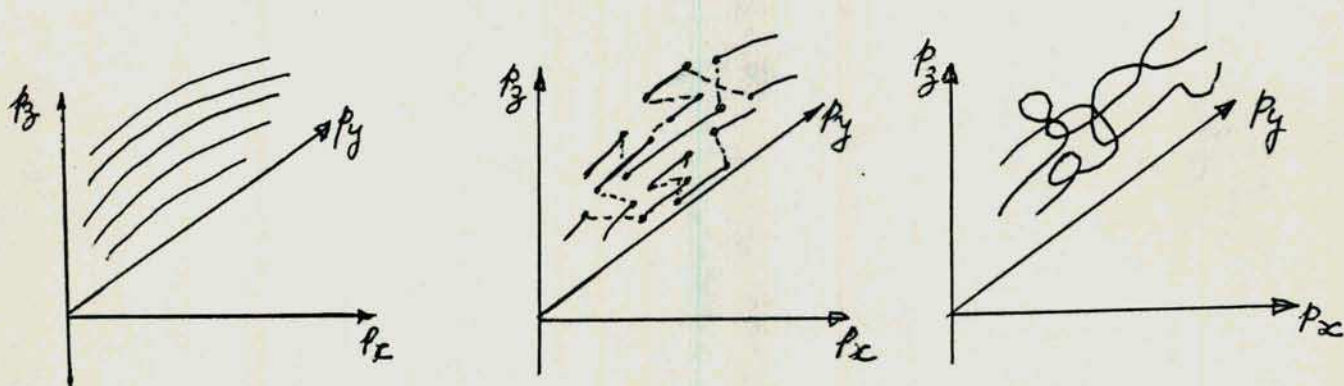
$$d\sigma = \sigma dv_c dv_e$$

Esta expresión se utilizará tanto para las colisiones elásticas como para las inelásticas, en el primer caso, la partícula emergente C se identifica con la incidente A, y en el segundo caso, la partícula C se identificará con la emergente de menor masa.

La ecuación de Boltzman, es válida también en el caso de la mecánica cuántica siempre que se interpreta las f como las funciones de

Wigner (Balescu , 1975, pag 89 y 391) y se utilicen las secciones eficaces cuánticas. Las funciones de Wigner representan el análogo cuántico de las funciones de distribución clásicas y puede verse el detalle en el libro de Balescu (1975) .

Existe otra expresión del término de colisiones , que fue elaborada inicialmente como una fórmula para el cálculo de la evolución debida a gran número de eventos al azar , cuando cada evento produce solo pequeños cambios en las trayectorias de las partículas (y por lo tanto en el impulso) . En ésta imagen , en el espacio de los impulsos , las partículas , en lugar de representarse por puntos fijos (sin fuerzas externas) o por un conjunto ordenado y uniforme de trayectorias (bajo la acción de fuerzas externas) comenzarían a deformarse y entremezclarse, en contraste con el caso antes considerado en que las trayectorias efectuarían saltos bruscos (en rigor instantáneos según el presente modelo) . En la figura se ilustra esta situación



sin interacciones

interacciones según
imagen de Boltzmanninteracciones según
imagen de Foáker-Planck

Este caso , sin embargo , también puede analizarse como caso límite del anterior Desde este punto de vista uno podría decir que el problema está resuelto usando el término de colisiones de Boltzmann . Sin

embargo , cuando se tratan de resolver numéricamente las ecuaciones cinéticas se encuentra la dificultad de que aparece una resta de dos cantidades que casi se cancelan , ésto puede llevar a graves errores y por ello vale la pena desarrollar para este caso , la aproximación al término de colisiones que constituye el llamado término de Fokker-Planck .

Este término de colisiones se utilizará para ciertos casos elásticos, como se verá luego .

Como se considerarán las interacciones binarias solamente , la interacción produce un efecto sobre ambas partículas A y B y pueden diferenciarse dos casos , en ambos las partículas A sufrirían pequeños cambios en el impulso , pero en el primero las partículas B también sufrirían solo pequeños cambios en el impulso , mientras que en el segundo caso , las partículas B cambiarían notablemente su impulso por la interacción .

Si bien ambas situaciones , desde el punto de vista del término de colisiones , pueden ser tratadas como casos típicos de Fokker-Planck , la primera admite una expresión bastante simétrica , debida a Landau (1936) y es la que puede aplicarse al caso de las interacciones con potenciales coulombianos para pequeños ángulos de deflexión \mathcal{E} , la usaremos para los términos de colisiones entre partículas cargadas y la denominaremos término de Landau .

En cambio , para el segundo caso se obtiene una expresión algo diferente , que se aplicará para la acción de los fotones sobre las partículas , o de los electrones sobre los átomos , y lo denominaremos simplemente término de Fokker-Planck .

La expresión del término de Landau , puede entonces obtenerse de la siguiente manera : si se define $\vec{\delta p} = \vec{p}_C - \vec{p}_A$ resulta por la conservación del impulso total en las colisiones $\vec{p}_D = \vec{p}_B - \vec{\delta p}$ y

$$\vec{p}_C = \vec{p}_A + \vec{\delta p}$$

En el límite de los $\vec{\delta p}$ pequeños se puede utilizar el desarrollo de

Taylor para las funciones de distribución ; hasta segundo orden es

$$f_c = f_A + \frac{\partial f_A}{\partial p_{Ai}} \delta p_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_A}{\partial p_{Ai} \partial p_{Aj}} \delta p_i \delta p_j$$

$$f_D = f_B - \frac{\partial f_B}{\partial p_{Bi}} \delta p_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_B}{\partial p_{Bi} \partial p_{Bj}} \delta p_i \delta p_j$$

Definimos ahora $W = \left(\frac{v_{AB}}{c} \right) \sigma$,

este valor representa la densidad de probabilidad de una colisión y es una función

$$W(\vec{p}_A, \vec{p}_B; \vec{p}_C, \vec{p}_D)$$

pero las variables se pueden reducir por las condiciones de conservación

a $W(\vec{p}_A, \vec{p}_D; \vec{p}_P)$, y es mas conveniente aún definirla como

$W(\vec{p}_A + \frac{1}{2} \vec{p}_P, \vec{p}_B - \frac{1}{2} \vec{p}_P; \vec{p}_P)$, o sea que se atribuye el valor de W a los promedios entre los impulsos final e inicial $(\frac{\vec{p}_A + \vec{p}_C}{2}, \frac{\vec{p}_B + \vec{p}_D}{2}; \vec{p}_P)$.

Por la reversibilidad de la probabilidad de colisiones, es

$$W(\vec{p}_A + \frac{1}{2} \vec{p}_P, \vec{p}_B - \frac{1}{2} \vec{p}_P; \vec{p}_P) = W(\vec{p}_C - \frac{1}{2} \vec{p}_P, \vec{p}_D + \frac{1}{2} \vec{p}_P; -\vec{p}_P)$$

por lo tanto W es par respecto a \vec{p}_P .

Esta función se desarrollará entonces como

$$W(\vec{p}_A + \frac{1}{2} \vec{p}_P, \vec{p}_B - \frac{1}{2} \vec{p}_P; \vec{p}_P) = W(\vec{p}_A, \vec{p}_B; \vec{p}_P) + \frac{1}{2} \delta p_i \left[\frac{\partial W}{\partial p_{Ai}} - \frac{\partial W}{\partial p_{Bi}} \right]_{(\vec{p}_A, \vec{p}_B; \vec{p}_P)}$$

Usando las expresiones desarrolladas de W , f_c , f_D y despreciando los términos de orden superior al segundo, resulta

$$\begin{aligned} \xi_A = & \int d\rho_B^3 d\mu_c d\varphi_c \left\{ \delta\rho_i W \left(\frac{\partial f_A}{\partial \rho_{Ai}} f_B - \frac{\partial f_B}{\partial \rho_{Bi}} f_A \right) + \right. \\ & + \frac{1}{2} \delta\rho_i \delta\rho_j \left[W \left(\frac{\partial^2 f_A}{\partial \rho_{Ai} \partial \rho_{Aj}} f_B + \frac{\partial^2 f_B}{\partial \rho_{Bi} \partial \rho_{Bj}} f_A - 2 \frac{\partial f_A}{\partial \rho_{Ai}} \frac{\partial f_B}{\partial \rho_{Bj}} \right) + \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{\partial W}{\partial \rho_{Ai}} - \frac{\partial W}{\partial \rho_{Bi}} \right) \left(\frac{\partial f_A}{\partial \rho_{Aj}} f_B - \frac{\partial f_B}{\partial \rho_{Bj}} f_A \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

El primer término dentro de la llave (proporcional a $\delta\rho_i$) se anula cuando se integra sobre μ_c y φ_c por lo antedicho respecto a la paridad de W . Como además

$$\frac{\partial W}{\partial \rho_{Bi}} \left(\frac{\partial f_A}{\partial \rho_{Aj}} f_B - \frac{\partial f_B}{\partial \rho_{Bj}} f_A \right) = \frac{\partial}{\partial \rho_{Bi}} \left[W \left(\frac{\partial f_A}{\partial \rho_{Aj}} f_B - \frac{\partial f_B}{\partial \rho_{Bj}} f_A \right) \right] - W \left(\frac{\partial f_A}{\partial \rho_{Aj}} \frac{\partial f_B}{\partial \rho_{Bi}} - \frac{\partial^2 f_B}{\partial \rho_{Bi} \partial \rho_{Bj}} f_A \right)$$

queda, teniendo en cuenta la simetría respecto a los índices i y j ,

$$\begin{aligned} \xi_A = & \int d\rho_B^3 d\mu_c d\varphi_c \left\{ \frac{1}{2} \delta\rho_i \delta\rho_j \left[\frac{\partial W}{\partial \rho_{Ai}} \left(\frac{\partial f_A}{\partial \rho_{Aj}} f_B - \frac{\partial f_B}{\partial \rho_{Bj}} f_A \right) + \right. \right. \\ & + W \frac{\partial}{\partial \rho_{Ai}} \left(\frac{\partial f_A}{\partial \rho_{Aj}} f_B - \frac{\partial f_B}{\partial \rho_{Bj}} f_A \right) \left. \right] \Big\} - \int d\rho_B^3 d\mu_c d\varphi_c \frac{1}{2} \delta\rho_i \delta\rho_j \cdot \\ & \cdot \frac{\partial}{\partial \rho_{Bi}} \left[W \left(\frac{\partial f_A}{\partial \rho_{Aj}} f_B - \frac{\partial f_B}{\partial \rho_{Bj}} f_A \right) \right]. \end{aligned}$$

Esta expresión puede simplificarse aún mas ya que, por el teorema de Gauss, la segunda integral puede transformarse en una integral de superficie que en el límite de altas velocidades se anula pues tanto f_B como sus derivadas tiendan a cero. Reacomodando la fórmula, resulta la expresión de Landau

$$\xi_A = \frac{\partial}{\partial \rho_{Ai}} \int d\rho_B^3 G_{ij} \left(\frac{\partial f_A}{\partial \rho_{Aj}} f_B - \frac{\partial f_B}{\partial \rho_{Bj}} f_A \right)$$

siendo

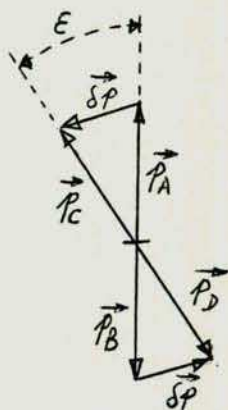
$$G_{ij} = \frac{1}{2} \int d\varphi_c d\varphi_c W \delta p_i \delta p_j$$

y por la definición de W ésta depende sólo de los valores de la velocidad relativa v_{AB} y del ángulo entre $\vec{\delta p}$ y \vec{p}_A y contiene la sección eficaz σ o sea

Esta integral sólo dependerá de v_{AB} y suele ser calculada para el sistema de coordenadas, centro de masa. En adelante eliminaré el subíndice AB por simplicidad.

Considerando el gráfico que describe la colisión, en el espacio de los impulsos y en el sistema centro de masa es

$$\vec{p}_{Acm} = -\vec{p}_{Bcm} \quad \text{y} \quad \vec{p}_{Ccm} = -\vec{p}_{Dcm}$$



de manera que δp representa el impulso entregado por la partícula B a la A en la colisión.

En ese sistema entonces σ_{cm} depende sólo de ϵ y v y sería

$$G_{ij} = \frac{v}{2c} \int \sin \epsilon d\epsilon d\varphi' \sigma \delta p_i \delta p_j$$

En este sistema es además $\vec{p}_C = \vec{p}_A$ y $\vec{p}_D = \vec{p}_B$, o sea que se conservan los módulos del impulso y los vectores rotan un ángulo ε ; esta es la propiedad que hace importante este sistema de coordenadas, entonces resulta por consideraciones geométricas

$$\begin{aligned}\delta p_x &= 2 p_{Acm} \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \sin \varphi' \\ \delta p_y &= 2 p_{Acm} \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cos \varphi' \\ \delta p_z &= -2 p_{Acm} \sin^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\end{aligned}$$

y por otra parte en este sistema es también $\vec{p}_A = m_A \vec{v}$.

Reemplazando las expresiones para $\vec{\delta p}$ en G_{ij} y haciendo primero la integral sobre $d\varphi$, puede verse que en éste sistema el tensor es diagonal, pues

$$\int \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \int \sin \varphi d\varphi = \int \cos \varphi d\varphi = 0$$

y que

$$\int \sin^2 \varphi d\varphi = \int \cos^2 \varphi d\varphi = \pi$$

$$G_{xx} = G_{yy} = \frac{\pi}{2} \frac{v^3}{c} m_r^2 \int \sin^3 \varepsilon d\varepsilon \sigma_{cm}$$

$$G_{zz} = \pi \frac{v^3}{c} m_r^2 \int (1 - \cos \varepsilon)^2 \sin \varepsilon d\varepsilon \sigma_{cm}$$

Se pueden entonces definir coeficientes A y B, de manera que

$$A = \frac{1}{2} \int \sin^2 \varepsilon d\varepsilon \sigma_{cm}$$

$$B = \int (1 - \cos \varepsilon) \sin \varepsilon d\varepsilon \sigma_{cm}$$

resultando entonces

$$G_{cm} = \pi \frac{v^3}{c} m_r^2 A \begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix}.$$

Si se transforma entonces a otro sistema en el cual \vec{p}_A tenga una orientación arbitraria \vec{m}

$$G_{ij} = \pi \frac{v^3}{c} m_r^2 \left[A \delta_{ij} + (B-A) n_i n_j \right]$$

siendo δ_{ij} la delta de Kronecker .

Estas son las expresiones que he utilizado en éste trabajo para los términos de colisiones entre partículas cargadas .

Para el caso que hemos llamado de Fokker-Planck , se puede seguir la idea anterior pero teniendo en cuenta que f_D no puede desarrollarse y por lo tanto , sería

$$\xi_A = \int d p_B^3 d \mu_C d \varphi_C \left\{ \left[W + \frac{1}{2} \delta p_B \frac{\partial W}{\partial p_B} \right] \left[f_A (f_D - f_B) + \delta p_C \frac{\partial f_A}{\partial p_{Ai}} f_D + \frac{1}{2} \delta p_i \delta p_j \frac{\partial^2 f_A}{\partial p_{Ai} \partial p_{Aj}} f_D \right] \right\}$$

Por la simetría de W si se intercambian los papeles de D y B equivale a una inversión de $\vec{\delta p}$.

Resultan anularse algunos términos con $(f_D - f_B)$ y potencias pares en δp

$$\begin{aligned} \xi_A = \int d p_B^3 d \mu_C d \varphi_C \left\{ \frac{1}{2} \delta p_i \frac{\partial W}{\partial p_{Ai}} f_A (f_D - f_B) + W \delta p_i \frac{\partial f_A}{\partial p_{Ai}} f_D \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \delta p_i \delta p_j f_D \frac{\partial}{\partial p_{Ai}} \left[W \frac{\partial f_A}{\partial p_{Aj}} \right] \right\} \end{aligned}$$

y siendo f aproximadamente la distribución de equilibrio , se puede tomar la aproximación $f_D \approx \frac{f_A}{f_C} f_B$, o sea

$$f_D - f_B \approx \frac{f_B}{f_C} (f_A - f_C) \approx - \frac{\delta p_{Ai}}{f_A} \frac{\partial f_A}{\partial p_{Ai}} f_B$$

llegándose a la forma standard de la ecuación de Fokker-Planck

$$\xi_A \approx \int d\vec{p}_B^3 d\vec{p}_C d\vec{p}_C \left\{ \frac{\partial}{\partial p_{Ai}} \left[\delta p_i W f_A f_B + \frac{1}{2} \delta p_i \delta p_j W \frac{\partial f_A}{\partial p_{Aj}} f_B \right] \right\}$$

que tiene la forma habitual si se toma

$$\langle \Delta p_i \rangle = - \int d\vec{p}_C d\vec{p}_C \delta p_i W f_B d\vec{p}_B^3$$

$$\langle \Delta p_i \Delta p_j \rangle = \int d\vec{p}_C d\vec{p}_C \delta p_i \delta p_j W f_B d\vec{p}_B^3$$

$$\xi_A = \frac{\partial}{\partial p_{Ai}} \left(- \langle \Delta p_i \rangle f_A + \frac{\langle \Delta p_i \Delta p_j \rangle}{2} \frac{\partial f_A}{\partial p_{Aj}} \right)$$

Esta expresión puede también obtenerse a partir de un razonamiento heurístico siendo $P(\vec{p}_A, \vec{\delta p})$ la probabilidad de que una partícula A cambie su impulso de \vec{p}_A a $\vec{p}_A + \vec{\delta p}$ por unidad de tiempo. Esta función sería equivalente a $\int W f_B d\vec{p}_B^3$ y representaría la parte de la probabilidad de transición, proporcional al flujo de partículas B que incide sobre las A.

Entonces sería en el instante t

$$f(\vec{p}, t) = \int f(\vec{p} - \vec{\delta p}, t - \Delta t) P(\vec{p} - \vec{\delta p}, \vec{\delta p}) d^3 \delta p,$$

desarrollando hasta segundo orden y siendo $\int P(\vec{p}, \vec{\delta p}) d^3 \delta p = 1$ (por ser P una probabilidad)

$$\Delta t \frac{\partial f}{\partial t} = \int d\vec{\delta p} \left\{ - \delta p_i \frac{\partial}{\partial p_{Ai}} (f P) + \frac{1}{2} \delta p_i \delta p_j \frac{\partial^2 (f P)}{\partial p_{Ai} \partial p_{Aj}} \right\}$$

y definiendo

$$\langle \Delta p_i \rangle = \frac{1}{c \Delta t} \int P(\vec{p}, \vec{\delta p}) \delta p_i d^3 \delta p$$

$$\langle \Delta p_i \Delta p_j \rangle = \frac{1}{c \Delta t} \int P(\vec{p}, \vec{\delta p}) \delta p_i \delta p_j d^3 \delta p$$

resulta la fórmula anterior para $\sum A$.

Analizando nuevamente la geometría de la colisión en el sistema centro de masa, en el que \vec{p}_A tiene la dirección \hat{z} , se obtiene

$$\delta p_z = -2p \sin^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$$

$$\delta p_x = 2p \sin\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \cos\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \sin\varphi'$$

$$\delta p_y = 2p \sin\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \cos\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \cos\varphi'$$

con m_r la masa reducida.

De lo cual resultan, siendo $v = v_{AB} = \frac{p}{m_r}$ y σ la sección eficaz en el sistema centro de masa donde ahora $\mu' = \cos \epsilon$

$$\langle \Delta p_z \rangle = -\frac{m_r}{c} \int f_B dp_B^3 \int 2v^2 \sigma \sin^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right) d\mu' d\varphi'$$

$$\langle \Delta p_x \rangle = \langle \Delta p_y \rangle = 0$$

Aquí conviene notar que en el caso de que una de las partículas involucradas (B) sea un fotón, el sistema centro de masa no puede definirse en forma sencilla, pero como trataremos con fotones de pequeña energía frente a la energía de reposo del blanco (A), se puede mantener un planteo análogo al presente pero entendiendo como sistema de referencia para el cálculo, el de laboratorio, y usando en lugar de m_r , $\frac{h\nu}{c^2}$ con ν la frecuencia del fotón en el sistema de laboratorio, y $v=c$ la velocidad de la luz y la dirección (μ', φ') correspondiente a la del fotón en el sistema de laboratorio.

Por otro lado, resultan

$$\langle \Delta p_z \rangle_{cm} = -2\pi \frac{m_r}{c} \int f_B dp_B^3 \int v^2 \sigma (1-\mu') d\mu'$$

$$\langle \Delta p_z \Delta p_z \rangle_{cm} = 2\pi m_r^2 c \int f_B dp_B^3 \int v^3 \sigma (1-\mu')^2 d\mu'$$

$$\langle \Delta p_x \Delta p_x \rangle_{cm} = \pi m_r^2 c \int f_B dp_B^3 \int v^3 \sigma (1-\mu'^2) d\mu'$$

$$\langle \Delta p_y \Delta p_y \rangle_{cm} = \langle \Delta p_x \Delta p_x \rangle_{cm}$$

Esta expresión puede transformarse a sistemas con orientación arbitraria teniendo en cuenta las propiedades tensoriales , como

$$\langle \Delta p_i \rangle = - \frac{v_i}{v} 2\pi \frac{m_A}{c} \int f_B d\mathbf{p}_B^3 D v^2$$

$$\langle \Delta p_i \Delta p_j \rangle = 2\pi m_A^2 c \int f_B d\mathbf{p}_B^3 v^3 \left[A \delta_{ij} + (B-A) \frac{v_i v_j}{v^2} \right]$$

siendo

$$D = \int \sigma(1-\mu') d\mu'$$

$$A = \frac{1}{2} \int \sigma(1-\mu'^2) d\mu'$$

$$B = \int \sigma(1-\mu')^2 d\mu'$$

Es interesante notar que el coeficiente D es precisamente la sección eficaz de intercambio de impulso que suele aparecer en los cálculos simplificados y a 1^{er} orden de los coeficientes de transporte.

En el presente trabajo , utilizaré las expresiones anteriores para el cálculo de los términos de colisión de los átomos de hidrógeno debidos a electrones , y para los términos de las partículas masivas debidos a fotones.

En relación al término de colisión de Landau debo mencionar que la forma propuesta , permite el cálculo por resolver el problema numérico, pero tiene dos dificultades , en primer lugar , en el límite de grandes ángulos de desviación \mathcal{E} , no es válida obviamente , y debe asumirse , por ejemplo algún valor mínimo del parámetro de impacto a partir del cual deja de valer la expresión y debe recurrirse al término de Boltzmann. Esta primera dificultad no es grave pues en el caso coulombiano las interacciones de gran \mathcal{E} tienen poca importancia .

Sin embargo , el segundo problema es mas grave , ya que éste término de colisiones de Landau diverge para el potencial coulombiano cuando tiende a cero , o sea cuando el parámetro de impacto tiende a infinito. Sin embargo , de lo mencionado sobre los plasmas en la parte a) se puede deducir que el apantallamiento de la interacción por la

correlación mencionada, hace que el potencial de interacción correspondiente sea modificado por un factor que da un límite superior al parámetro de impacto b que sería el valor de ℓ_D . Liboff (1959, pag 178 ChC) calculó las integrales para el potencial efectivo de Debye (el coulombiano afectado por el factor $e^{-\frac{r}{\ell_D}}$) y sus resultados coinciden (en nuestra aproximación) con los resultados obtenidos asumiendo un corte de la integral para $b = \ell_D$.

El último punto mencionado, toca sin embargo un punto delicado, ya que se puede ver allí que esa amortiguación de la interacción para parámetros de impacto mayores que ℓ_D descansa en que existe una interacción con las partículas que forman la nube, y por lo tanto, se ve que para un tratamiento más completo debería incluirse una interacción entre partículas y grandes grupos de partículas.

Este tipo de interacciones incluye las que se denominan partícula-onda, que pueden expresarse a través de una descomposición de Fourier de la ecuación no lineal de Vlasov y la de Poisson (que define el campo eléctrico autoconsistente).

Un análisis mas riguroso del problema, puede encontrarse en el libro de Balescu (Cap 20.6, pag 639) para el caso de plasmas y conduce a una ecuación sobre la transformada de Fourier, derivada independientemente por Lennard, por Guernseny y por Balescu y llamada de Lennard-Balescu. De ello resulta la expresión siguiente del término de colisiones para pequeñas desviaciones que incluye los efectos colectivos.

$$\xi_A = \frac{8\pi^4 e^4}{m_A^2} \int d\vec{k}^3 \int d\vec{p}_B^3 \vec{k} \cdot \nabla_{\vec{p}_A} \left\{ \frac{\tilde{V}_k^2}{|\epsilon|^2} \delta(\vec{k} \cdot \vec{v}) \vec{k} \cdot (\nabla_{\vec{p}_A} f_A f_B - \nabla_{\vec{p}_B} f_B f_A) \right\}$$

$$\epsilon = 1 + \frac{8\pi^4 e^2}{m_A} \tilde{V}_k \int d\vec{p}_B^3 i \delta(\vec{k} \cdot \vec{p}_A - \vec{k} \cdot \vec{p}_B) \vec{k} \cdot \nabla_{\vec{p}_B} f_B$$

siendo $\sqrt{V_B}$ la amplitud al cuadrado del potencial de interacción para el vector de propagación \vec{B} .

Según se muestra en el libro de Balescu, ésta expresión coincide con la transformada de Fourier del término de colisiones de Landau, excepto por el coeficiente ϵ (permitividad dieléctrica) que da cuenta de los efectos colectivos.

Aquí

$$\delta_- \text{ proviene de } \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{x - i\delta} = P\left(\frac{1}{x}\right) + i\pi \delta_-(x)$$

donde P significa valor principal

Este término sin embargo no fué considerado por ser pequeño el valor $(1 - \epsilon)$ en el caso que nos ocupa y se menciona sólo como referencia.

El término de interacción onda-partícula tampoco fué considerado pues como se ha comprobado experimentalmente el proceso no es importante salvo en plasmas turbulentos.

2.3 Magnitudes características

En esta parte; analizaré las condiciones que es razonable asumir en el caso que nos ocupa. Tomaré como cotas para la temperatura, los valores de $5000^\circ \text{K} \leq T \leq 50000^\circ \text{K}$.

En las atmósferas estelares el rango de temperatura es más amplio pues, en las fotosferas de estrellas frías pueden alcanzarse valores de hasta 4000°K (el caso del sol) y aún inferiores, y en las coronas y regiones de transición pueden alcanzarse temperaturas de hasta 10^6°K .

Sin embargo, fuera de las cotas que he tomado las condiciones del gas son muy diferentes y el modelo de gas que proponemos no es adecuado.

El gas que proponemos está constituido por átomos de hidrógeno (sólo en el estado fundamental), protones, electrones y fotones.

Se considerará que la interacción entre la radiación y la materia corresponde sólo al continuo de Lyman .

En el caso de las regiones de baja temperatura , éstas suelen ser de alta densidad y presión , los protones son escasos y los electrones provienen de la ionización de los elementos pesados , que aunque poco abundantes tienen potenciales de ionización moderados (por ejemplo $F\ I$, $Ca\ I$, $Si\ I$, etc) y por otra parte , la formación de moléculas es importante (por ejemplo H_2) y también lo es la formación de H^- . En este caso , en cambio los fotones son poco relevantes para los coeficientes de transporte asociados a la materia .

En el caso de las regiones de alta temperatura , suelen ser de bajas densidades y presiones y el hidrógeno está completamente ionizado , por lo tanto se aproximaría a un plasma totalmente ionizado , el campo de radiación interactúa con los protones y electrones a través de transiciones libre-libre y con otros iones de elementos de potenciales de ionización altos (por ejemplo NV , o VI , $Si\ IV$, $Fe\ XII$, etc).

En el rango que nos interesa , existe el problema del He, cuya abundancia (aproximadamente 10 %) no es tan pequeña y que podría producir alguna modificación en nuestros resultados.

Las cotas respecto a la densidad de partículas que tomaremos son entre $10^{14}\text{ cm}^{-3} > n > 10^8\text{ cm}^{-3}$. Sin embargo , el rango de valores de presión es mas reducido por lo que se mencionó sobre que las mayores densidades corresponden a las menores temperaturas y viceversa . Se pueden tomar como límites para la presión del gas p_g (en la que no se incluyen los fotones)

$$10^3\text{ dina cm}^{-2} > p_g > 10^{-2}\text{ dina cm}^{-2}$$

donde el valor más bajo corresponde a una región de transición y el más alto a una fotosfera.

En el caso que nos ocupa , se cumplen bien las condiciones de gas

diluido, y además el modelo de gas de átomos de hidrógeno, protones, electrones y fotones es adecuado. A partir de las observaciones en el caso solar se podría definir como longitud característica mínima de variación de los parámetros macroscópicos $L_e \sim 10^7$ cm. Sin embargo, no pueden excluirse valores mucho menores para L ya que la resolución limitada de las observaciones no permitiría descartarlos, y los modelos teóricos conducen a valores de hasta $L_t \sim 10^4$ cm (por ejemplo para la región de transición cromósfera-corona).

De los valores dados, en el peor de los casos, en un cubo de volumen L^3 estarían contenidas 10^{21} partículas, cantidad suficiente para apoyar las hipótesis estadísticas.

Por otra parte, el alcance de la interacción entre átomos y otros componentes es del orden de los Angstrom; para las interacciones entre los fotones y los electrones y protones (dispersión de Thompson), el alcance es del orden del radio clásico de esas partículas, que es muy pequeño. Finalmente la interacción entre partículas cargadas, como se mostró en a) tiene un alcance limitado por l_D que en unidades cgs (que serán las utilizadas en adelante) es

$$l_D \approx 6.9 \sqrt{\frac{T}{n_e}}$$

siendo n_e la densidad electrónica.

El valor máximo de l_D en las condiciones que nos ocupan es del orden

$$l_{DM} \sim 3 \cdot 10^{-2} \text{ cm} \quad (\text{para las condiciones de mayor } T \text{ y menor } n_e).$$

Por las cifras que se mostraron es evidente que en todos los casos, el alcance de la interacción l_c es pequeño frente a la longitud característica L y desde el punto de vista macroscópico la duración de una colisión es despreciable.

Por otra parte, la cantidad de partículas contenidas en un cubo de volumen l_D^3 es

$$N \approx 350 \sqrt{\frac{T^3}{n_e}}$$

y el mínimo de ésta cantidad resulta $N_m \sim 50$ (para las condiciones de menor T). Este número no es muy grande pero es aceptable para

justificar el significado que se da a la distancia de Debye como cota para las interacciones binarias.

Otro parámetro que debe tenerse en cuenta es el "libre camino medio"

ℓ que debe compararse con L y con r_c . Este valor ℓ , es en general muy dependiente de la velocidad en forma inversa, pero en el problema presente, sólo interesan las partículas cuya velocidad máxima es la térmica (v_T), siendo

$$v_T = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad y \quad \ell = v_T \tau$$

donde k es la constante de Boltzman y τ^{-1} la frecuencia de colisiones.

Una estimación de los libres caminos medios para las diferentes partículas puede hacerse en base a las fórmulas del libre de Allen (1962), de acuerdo al cual es

$$\text{para electrones} \quad \ell_e \sim \frac{2 \times 10^5 T^2}{n_e \ln \Lambda}$$

$$\text{para protones} \quad \ell_p \sim \frac{10^5 T^2}{n_e \ln \Lambda}$$

siendo $\ln \Lambda$ el llamado "logaritmo coulombiano" que tiene la expresión

$$\ln \Lambda = 9 + 3.45 \log T - 1.15 \log n_e \approx 10$$

por lo cual se obtiene

$$\ell_{em} \sim \ell_{pm} \sim 10^4 \text{ cm}$$

y

$$\ell_{em} \sim \ell_{pm} \sim 1 \text{ cm}$$

para átomos.

$$\ell_a \sim \frac{10^{15}}{n_a}$$

sería

$$\ell_{am} \sim 10^8 \text{ cm} \quad (\text{si } n_a \sim 10^{14} \text{ cm}^{-3})$$

y

$$\ell_{am} \sim 10 \text{ cm} \quad (\text{si } n_a \sim 10^7 \text{ cm}^{-3})$$

sin embargo, ésta última cifra está ciertamente sobrestimada para los casos usuales, ya que la densidad de átomos suele ser mucho mayor que la utilizada.

Los números presentados muestran que en todos los casos el libre camino medio es mucho mayor que el alcance de la interacción entre partículas, por lo que la hipótesis de gas diluido está justificada.

Se ve que el libre camino medio de las partículas cargadas si bien es pequeño frente a L_0 , en ocasiones, no lo es frente a L_t (en la región de transición), y es peor aún la situación respecto a los átomos donde en algunos casos λ_{at} llega incluso a superar a L_0 .

Sin embargo en los libres caminos medios considerados hasta aquí no se han tenido en cuenta los fotones, y si se consideran los valores usuales del campo de radiación, pueden corregirse los valores de λ_a tomando el mínimo de la expresión anterior y la correspondiente al libre camino respecto de la ionización (λ_{af})

$$\lambda_{af} \sim \left(4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\sigma_{\nu}}{k\nu c} I_{\nu} d\nu \right)^{-1} \sim$$

$$\sim \frac{c^3}{8\pi\sigma_{\nu_0} \nu_0^3} \frac{1}{W E_1 \left(\frac{k\nu_0}{h T_R} \right)}$$

donde I_{ν} es la intensidad de radiación, ν la frecuencia, σ_{ν} la sección eficaz de fotoionización, E_1 la función integroexponencial, W el "factor de dilución" y T_R la "temperatura de radiación" (serán definidas mas adelante).

Con los valores usuales del campo de radiación, resulta

$$\lambda_{af} \sim 10^5 \text{ cm}$$

que es un valor intermedio entre L_0 y L_t .

En base a la comparación entre L y λ , se ve que en general es $L_0 \gg \lambda$, en ese caso se puede esperar que las funciones de distribución se aparten poco de las maxwellianas (o sea de las de equilibrio).

Pero cuando se compara λ con L_t puede verse que la desigualdad no es tan definida y por ejemplo en los casos de la región de transición cromósfera-corona (especialmente en las fulguraciones solares) cabe

esperar que esos apartamientos no sean pequeños.

Por otra parte, cuando se considera el libre camino medio de los fotones (l_f), puede expresarse como

$$l_f \sim \frac{1}{\sigma_v n_a}$$

Para las frecuencias cercanas a la de la cabeza del continuo de Lyman (ν_0), resulta

$$l_{f_m} \sim 10^4 \text{ cm} \quad \text{y} \quad l_{f_M} \sim 10^{10} \text{ cm}$$

y en algunos casos supera incluso el valor de L_0 .

Vemos entonces que la función de distribución de los fotones, en muchos casos se aparta notablemente de la de equilibrio (función de Planck, B_ν) y está frecuentemente gobernada por las condiciones de contorno de la ecuación cinética correspondiente a los fotones. Esta expresión puede transformarse (multiplicando por $\frac{h\nu}{c}$) en la forma usual de la ecuación de transporte radiativo.

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \vec{n} \cdot \nabla I_\nu = \epsilon_\nu - \kappa_\nu I_\nu$$

donde I_ν es la intensidad de radiación en la dirección \vec{n} , ϵ_ν la emisividad y κ_ν el coeficiente de absorción. Los coeficientes ϵ_ν y κ_ν se pueden expresar de la fórmula de Boltzman

$$\kappa_\nu = \sigma_\nu \left(n_a - n_a^* e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right)$$

$$\epsilon_\nu = \frac{2 h \nu^3}{c^2} \sigma_\nu n_a^* e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

siendo

$$n_a^* = n_p n_e \left(\frac{n_a}{n_p n_e} \right)^*$$

y la fórmula de Saha

$$\left(\frac{n_a}{n_e n_p} \right)^* = \frac{g_a}{2 g_p} \left(\frac{h^2}{2 \pi m_e k T} \right)^{3/2} e^{\frac{h \nu_0}{k T}} \approx \frac{4.14 \times 10^{-16}}{T^{3/2}} e^{\frac{h \nu_0}{k T}}$$

siendo g_a y g_p , los pesos estadísticos correspondientes a átomos y protones.

Esta ecuación, suele también escribirse

$$\frac{1}{k_\nu c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \frac{\vec{n}}{k_\nu} \cdot \nabla I_\nu = S_\nu - I_\nu$$

siendo $S_\nu = \frac{\epsilon_\nu}{k_\nu}$ la función fuente,

en las expresiones mas usuales suele despreciarse el "tiempo de vuelo" de los fotones $\left(\frac{1}{k_\nu c} \right)$ por ser pequeño frente al tiempo de variación característica t_0 de los parámetros macroscópicos, sin embargo, a partir de los valores que hemos mostrado, debería tenerse en cuenta en algunos casos con $t_0 \lesssim 1$ seg.

En otras expresiones de la ecuación de transporte radiativo, que se usan para geometrías simples, se define

$$\frac{\vec{n}}{k_\nu} \cdot \nabla I_\nu = -\rho \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu}$$

siendo $d\tau_\nu$ el elemento de profundidad óptica

$$d\tau_\nu = -k_\nu ds$$

con ds el elemento de distancia geométrica en la dirección de variación de I_ν y $\nu = \cos \theta$ el factor de proyección de esa distancia geométrica respecto de la dirección de propagación del fotón.

Con esas definiciones es

$$\nu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - S_\nu$$

que es especialmente útil para el caso unidimensional.

De la expresión usual puede obtenerse la fórmula de difusión que se aplica a los casos en que la distancia característica de variación de $I_\nu(L)$, es mucho mayor que el libre camino medio del fotón (K_ν^{-1}) .

En estos casos es $(K_\nu L) \gg 1$ y resulta

$$\nu \frac{\partial I_\nu}{\partial \tau_\nu} \approx \nu \frac{I_\nu}{(K_\nu L)} \ll I_\nu$$

por lo tanto, es en la aproximación de orden cero,

$$I_\nu^{(0)} \approx S_\nu$$

De aquí se ve que si se usa un desarrollo perturbativo análogo al de CHE la corrección de I_ν al primer orden sobre el parámetro de desarrollo $\theta \equiv (K_\nu L)^{-1}$ resulta

$$\nu \frac{\partial S_\nu}{\partial \tau_\nu} = I_\nu^{(1)}$$

por lo que la fórmula de difusión válida hasta primer orden es

$$I_\nu = S_\nu + \nu \frac{\partial S_\nu}{\partial \tau_\nu}$$

o, en notación vectorial,

$$I_v = S_v - \frac{\vec{m}}{K_v} \cdot \nabla S_v$$

Es usual definir los momentos de la intensidad

$$J_v = \frac{1}{4\pi} \int I_v d\alpha$$

$$H_v = \frac{1}{4\pi} \int \nu I_v d\alpha$$

$$K_v = \frac{1}{4\pi} \int \nu^2 I_v d\alpha$$

Con $d\alpha$ el elemento de ángulo sólido.

De acuerdo a lo expuesto en el caso de difusión, y suponiendo S_v isótropa el flujo de radiación \vec{F}_v tiene la dirección del ∇S_v y el valor

$$\vec{F}_v = 4\pi H_v = \pi \frac{4}{3} \frac{\partial S_v}{\partial \tau}$$

O en forma vectorial

$$\vec{F}_v = \frac{-4\pi}{3 K_v} \nabla S_v$$

Esta fórmula tiene el mismo aspecto que las de transporte que vinculan los flujos de cantidades relacionadas con la materia, con los gradientes de los parámetros macroscópicos. Pero, en un análisis cuidadoso, se observa que aquí está implícita la suposición de la isotropía de ϵ_v y K_v y un planteo mas general, debe considerar que los gradientes de los parámetros macroscópicos producen anisotropía en ϵ_v y K_v que daría lugar a otros términos en el flujo de radiación.

La situación en que es válida la aproximación de difusión fué analizada por Thomas (1961) y denominada LOS .

Hasta éste punto , sólo se ha considerado la proximidad de las funciones de distribución respecto de las de equilibrio , pero éste es individual y hasta aquí , nada se ha dicho sobre la relación entre los parámetros de esas distribuciones de equilibrio (n , v , T) para las diferentes especies . Para ello , es necesario considerar las longitudes características para el intercambio de impulso y energía entre las especies y compararlas con las características de variación de los parámetros macroscópicos .

Debe tenerse en cuenta que en algunos fenómenos rápidos , como se observan en la primera fase de las fulguraciones solares , se observan cambios importantes en tiempos de fracción de segundos .

Estas longitudes características serían del orden de los tiempos característicos de intercambio multiplicados por la velocidad térmica de la especie en cuestión .

El tiempo de intercambio entre protones y electrones , de acuerdo a Br ginskii (1965) es

$$t_{ep} = \frac{m_p}{m_e} t_e$$

donde t_e es el tiempo de termalización de los electrones que según el mismo libro , es

$$t_e \sim \frac{3\sqrt{m_e} (kT)^{3/2}}{4\sqrt{2\pi} n_e e^4 \ln \Lambda} \approx \frac{3.5 \times 10^4}{n_e} \left(\frac{T}{11406} \right)^{3/2}$$

de lo cual resulta

$$t_{ep} \sim 10^{-4} \text{ seg} \quad \text{y} \quad t_{ep} \sim 0.1 \text{ seg}$$

y siendo

$$v_{T_p} \sim 2 \times 10^6 \text{ cm seg}^{-1}$$

resulta la longitud característica para que se igualen los parámetros de la distribución de protones a los de la distribución de los electrones

$$l_{ep} \sim 10^5 \text{ cm}$$

A partir de los números mostrados, se ve que excepto en los casos mencionados, de la primera fase de las fulguraciones, los tiempos en los cuales se establecerían distribuciones de electrones y protones son cortos frente a los tiempos en que se observan variaciones macroscópicas. Sin embargo, las longitudes características de intercambio, no son menores que L_t aunque son menores que L_e en general. Esto implica, que en las regiones de transición puede haber diferencias significativas entre los parámetros de las distribuciones de electrones y protones.

El intercambio de impulso y energía entre los átomos y las partículas cargadas, teniendo en cuenta solo las interacciones elásticas, sería dominado por las colisiones átomo-ion ya que si bien las átomo-electrón son más frecuentes sólo producen un pequeño intercambio. Se pueden calcular por

$$t_{ap} \sim (\nu_{Tp} n_p \sigma_{ap})^{-1}$$

de donde $t_{apM} \sim 1 \text{ seg}$

y $l_{apM} \sim 10^6 \text{ cm}$

que está también comprendida entre L_t y L_o y entonces , en las regiones de transición , puede también haber diferencias significativas entre los parámetros de la distribución de los átomos y los de las distribuciones de las otras partículas .

La situación se complica aún mas cuando se considera el efecto de la recombinación radiativa y la fotoionización .

El tiempo característico de la recombinación radiativa sería según Allen (1962)

$$t_{rec} \sim \frac{5 \times 10^{10} \sqrt{T}}{n_e}$$

de donde $t_{rec_M} \sim 5 \times 10^3 \text{ seg}$

y $t_{rec_m} \sim 10 \text{ seg}$

Estos tiempos t_{rec} son mucho mayores que los correspondientes a las colisiones elásticas .

El tiempo característico de recombinación por choque triple (recombinación colisional) es

$$t_{recol} \sim (\nu_{Te} n_e n_p \sigma_{recol})^{-1} \left(\frac{m_e n_p}{m_a} \right)^* \sim \frac{10^{18} T}{n_e^2} \sim 10^{-3} t_{rec}^2$$

$$t_{recol_M} \sim 10^7 \text{ seg} \quad \text{y} \quad t_{recol_m} \sim 0.1 \text{ seg}$$

Estas cifras muestran que dentro del rango propuesto , es común el caso en que la recombinación radiativa es mucho mas frecuente que la colisional , y en los casos de baja temperatura se llegaría a la situación opuesta . En esos casos de baja temperatura , sin embargo el valor

de t_{re} está mas subestimado para los casos habituales pues es m_e mayor que el valor que hemos adoptado , (debido a la ionización de otros elementos) y , por lo tanto , si se usan valores de m_e mas realistas, la situación puede aún empeorar para las más altas presiones que hemos considerado .

Si se analiza la ionización , se llega a similares conclusiones respecto a que el tiempo de ionización t_{ion} es mayor que los característicos para colisiones elásticas y en general es menor que el de ionización colisional t_{icel} , aunque a veces ésta última desigualdad se invierte .

Para ésta última comparación es fundamental la intensidad del campo de radiación , que como se explicó antes , no corresponde en general a la función de Planck de la temperatura que corresponde a las distribuciones de las partículas (T , temperatura cinética) .

Es usual definir la velocidad de diferentes procesos por unidad de volumen , que se puede expresar como

$$R_{ic} = \frac{n_e}{t_{ion}} \quad ; \quad R_{ci} = \frac{n_p}{t_{re}}$$

$$C_{ic} = \frac{n_a}{t_{icel}} \quad ; \quad C_{ci} = \frac{n_p}{t_{rel}}$$

(las letras R se usan para los procesos radiativos y las C para los colisionales) . Estas tasas de ionización y recombinación son generalmente usadas para calcular el grado de ionización del gas por medio de la ecuación de balance estadístico

$$R_{ic} + C_{ic} = R_{ci} + C_{ci} ,$$

la validez de esta ecuación implica que pueden despreciarse la derivada temporal de la ionización , y los flujos difusivos (ésto se verá con cierto detalle más adelante) . En esas condiciones , puede observarse que para las regiones de alta presión , son en general C_{ic} y C_{ci} los términos dominantes , y por la relación que existe entre ellos , resulta que es

$$\frac{n_a}{n_c n_p} = \left(\frac{n_a}{n_e n_p} \right)^*$$

la ionización corresponde a la ley de Saha y entonces la función fuente resulta igual a la función de Planck. Luego en el caso LOS, resulta ser la distribución de los fotones, próxima a la de Planck y por lo tanto el gas se encontrará en condiciones de ETL.

Si en cambio (como sucede habitualmente en las regiones de baja presión) las tasas radiativas dominan el estado de ionización, y vale la ecuación planteada de balance estadístico, la situación resulta más complicada y ha sido analizada, en términos de probabilidades, en los libros que tratan el transporte de radiación por ejemplo el de Athay (1972). De acuerdo a éstos, se puede establecer un criterio de comparación entre las distancias ópticas características de la variación de los parámetros macroscópicos τ_L y un valor llamado espesor óptico de termalización τ_{tu} , que es aproximadamente

$$\tau_{tu} \sim \sqrt{\frac{C_{c1} + R_{c1}}{C_{c1}}}$$

Este valor, puede expresarse en término de libres caminos medios respecto de procesos específicos (por ejemplo el llamado de degradación) pero no entraremos mas profundamente en este tema que es tema de estudio de la teoría de transporte radiativo.

A partir de esa teoría se concluye que cuando $\tau_L \gg \tau_{tu}$ también se produce la situación en que la distribución de los fotones es muy próxima a la que da la ley de Planck, y por lo tanto la ionización cumple la ecuación de Saha (nuevamente ETL).

Sin embargo, también es común, en la región que nos interesa, la situación en que $\tau_L \lesssim \tau_{tu}$ y por lo tanto no se cumplen las leyes de Planck y Saha. En este caso, para definir el campo de radiación debería

especificarse $I_\nu(\nu, \mu)$, pero de acuerdo a las definiciones de
 $I_\nu^s = I_\nu(\mu) + I_\nu(-\mu)$ $I_\nu^o = I_\nu(\mu) - I_\nu(-\mu)$ basta con dar ese par de valores para
 $0 \leq \mu \leq 1$.

A fin de contar con un conjunto de variables mínimo, se supuso I_ν^s isotrópico (independiente de μ) y dado, a orden cero, por

$$I_\nu^s = J_\nu = \frac{2k\nu^3}{c^2} \frac{W}{e^{\frac{h\nu}{kT_R}} - 1}$$

de donde

$$f_\nu = \frac{W}{e^{\frac{h\nu}{kT_R}} - 1}$$

si se define

$$d\rho_\nu^3 = 2 \frac{\nu^2}{c^3} d\nu d\mu d\varphi$$

Aquí los parámetros W y T_R que son habitualmente llamados factor de dilución y temperatura de radiación son los que caracterizan el valor absoluto y la variación con la frecuencia, del espectro de radiación. En las condiciones de LTE, son

$$W = 1 \quad \text{y} \quad T_R = T$$

El valor de I_ν^a , fué supuesto de primer orden en éste trabajo, como corresponde al caso LOS. Esto, sin embargo puede ser también una buena aproximación en el caso de la región de transición prominencia-corona de las prominencias solares, en el cual la región es ópticamente delgada y la radiación está dada por la que proviene de la cromósfera, por lo cual el flujo de radiación es perpendicular a la dirección en la cual son importantes los gradientes de los parámetros macroscópicos.

En este trabajo también se supondrá la validez , a orden cero , de la ecuación de balance estadístico , para lo cual se hallarán las condiciones necesarias . Y tendremos en cuenta solamente las interacciones binarias por lo tanto supondremos despreciables las ionizaciones colisionales y recombinaciones por choque triple (que son procesos inversos desde el punto de vista mecánico) , ésta suposición equivale a $\tau_{tr} \gg 1$ y a $t_{mol} \gg t_{re}$.

De acuerdo a esas suposiciones para calcular el grado de ionización debe recurrirse en general a la ecuación de balance estadístico , siendo

$$R_{ic} = 4\pi n_a \int_{v_0}^{\infty} \frac{\sigma_v}{h\nu} J_v dv$$

$$R_{ci} = 4\pi n_e n_p \left(\frac{n_a}{n_e n_p} \right)^* \int_{v_0}^{\infty} \frac{\sigma_v}{h\nu} \left(\frac{2h\nu^3}{c^2} + J_v \right) e^{-\frac{h\nu}{kT}} dv$$

Como para el hidrógeno $\sigma_v = \sigma_{v_0} \left(\frac{v_0}{v} \right)^3$, y definiendo

$$x = \frac{h\nu}{kT} \quad ; \quad x_0 = \frac{h\nu_0}{kT} \quad ; \quad x_R = \frac{h\nu}{kT_R}$$

resultan

$$R_{ic} = \frac{8\pi}{c^2} \sigma_{v_0} v_0^3 n_a W \int_{\left(x_0 \frac{T}{T_R}\right)}^{\infty} (e^{x_R} - 1)^{-1} \frac{dx_R}{x_R}$$

$$R_{ci} = \frac{8\pi}{c^2} \sigma_{v_0} v_0^3 \left(\frac{n_a}{n_e n_p} \right)^* n_e n_p \int_{x_0}^{\infty} \left(1 + \frac{W}{e^{x_R} - 1} \right) e^{-x} \frac{dx}{x}$$

Las expresiones de las integrales que se encuentran en ésta fórmula , pueden desarrollarse en serie usando

$$(e^{x_R} - 1)^{-1} = e^{-x_R} \left(1 + e^{-x_R} + \frac{1}{2} e^{-2x_R} + \dots \right)$$

pero , en el rango de temperaturas de radiación que proponemos (coincidente con el de temperatura) , no es mala aproximación retener sólo el primer término de este desarrollo , y entonces resultan

$$R_{1c} = C n_a W E_1 \left(x_0 \frac{T}{T_R} \right)$$

$$R_{c1} = C \left(\frac{n_a}{n_e n_p} \right)^* n_e n_p \left[E_1(x_0) - W E_1 \left(x_0 \left(1 + \frac{T}{T_R} \right) \right) \right]$$

donde

$$C = \frac{8\pi}{c^2} \sigma_{v_0} v_0^3 \quad \text{y} \quad E_1(x_0) = \int_{x_0}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x}$$

Si se usa que para $x_0 \gtrsim 5$ es $E_1(x_0) \approx \frac{e^{-x_0}}{x_0}$

estas expresiones pueden aproximarse a

$$R_{1c} = C n_a W \frac{T_R}{T} \frac{e^{-x_0 \frac{T}{T_R}}}{x_0}$$

$$R_{c1} = C \left(\frac{n_a}{n_e n_p} \right)^* n_e n_p \frac{e^{-x_0}}{x_0}$$

A partir de ellas , y de la definición del coeficiente de apartamiento de ETL b_1

$$\frac{n_a}{n_e n_p} = b_1 \left(\frac{n_a}{n_e n_p} \right)^*$$

resulta del balance estadístico

$$b_1 = \frac{T e^{-x_0}}{W T_R e^{-x_0 \frac{T}{T_R}}}$$

Si entonces , se supone dada la presión de gas p_g , siendo

$$p_g = (n_e + n_p + n_a) kT$$

y el gas , eléctricamente neutro $n_p = n_e$, se obtienen

$$n_e = n_p = \frac{1}{b_1} \left(\frac{n_e n_p}{n_a} \right)^* \left[\sqrt{1 + \frac{p_g b_1}{kT} \left(\frac{n_a}{n_e n_p} \right)^*} - 1 \right]$$

$$n_a = b_1 n_e n_p \left(\frac{n_a}{n_e n_p} \right)^*$$

que son las fórmulas que he utilizado para obtener los valores de densidad de las diferentes especies , consistentes con los valores de p_g , T , W , T_R elegidos . Debo mencionar que en los casos de muy alta ionización , para evitar problemas numéricos he utilizado el primer término del desarrollo de n_e , resultando , si

$$\frac{p_g b_1}{kT} \left(\frac{n_a}{n_e n_p} \right)^* < 10^{-4}$$

$$n_e = \frac{1}{2} \frac{p_g}{kT}$$

2.4 Ecuaciones hidrodinámicas

Las ecuaciones hidrodinámicas se obtienen a partir de los momentos de las ecuaciones cinéticas . Esta derivación es común en los libros , pero la repetiremos aquí , con las consideraciones relevantes al caso que nos ocupa ,

Una de las consideraciones que haremos , es que el campo de radiación está descrito por una ecuación de transporte y no se considerarán en las densidades , ni flujos , las cantidades y flujos que son propias del campo de radiación . Sin embargo , desde luego , en las ecuaciones para la materia , existirá una influencia del campo de radiación , y por ejemplo , en la consideración de los invariantes de una colisión , es imprescindible tener en cuenta la radiación , que hace que la energía, el impulso e incluso el número de partículas no se conserven en el caso presente . En cambio se conserva , en esta aproximación , la masa de las partículas .

La ecuación cinética para la especie α (excluidos los fotones) puede escribirse

$$\mathcal{L} f_{\alpha} = \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v} f_{\alpha}) + G_{\alpha} \cdot \nabla_v f_{\alpha} = \mathcal{E}_{\alpha}$$

Por la conservación de la masa total en las colisiones será

$$\sum_{\alpha} \int \mathcal{L} f_{\alpha} m_{\alpha} d p_{\alpha}^3 = \sum_{\alpha} \int \mathcal{E}_{\alpha} m_{\alpha} d p_{\alpha}^3 = 0$$

(por definición $\int f_{\alpha} d p_{\alpha}^3 = n_{\alpha}$) .

Definiendo la velocidad de difusión de la especie α respecto del fluido como \vec{v}_{α} y la velocidad general del fluido como \vec{u} , es

$$\int f_{\alpha} \vec{v} d p_{\alpha}^3 = n_{\alpha} (\vec{v}_{\alpha} + \vec{u})$$

y entonces , siendo al integrar por partes el último término del miembro izquierdo de (f1) nulo , por ser $f \rightarrow 0$ cuando $v \rightarrow \infty$, y suponiendo que G_{α} es independiente de \vec{v} , queda

$$\frac{\partial n_{\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}) + \nabla \cdot (n_{\alpha} \vec{u}) = \int \mathcal{E}_{\alpha} d p_{\alpha}^3 \quad (f2)$$

Multiplicando por m_α y sumando sobre α , se define la densidad $\rho = \sum_\alpha n_\alpha m_\alpha$ y la velocidad del fluido \vec{u} como la velocidad del centro de masa

$$\sum_\alpha (\vec{v}_\alpha + \vec{u}) n_\alpha m_\alpha = \rho \vec{u}$$

En consecuencia

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

Puede verse que en el miembro derecho de la ecuación los términos de colisiones elásticas se anulan al integrar y quedan sólo los debidos a ionizaciones y recombinaciones que tienen la forma de Boltzmann. Si se denominan $R_{\alpha \downarrow}$ y $R_{\alpha \uparrow}$ a la cantidad de partículas α por unidad de volumen, y de tiempo, que se crean y eliminan como consecuencia de los procesos de ionización y recombinación, la expresión (f_2) se puede explicitar

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \vec{v}_\alpha) + \nabla \cdot (n_\alpha \vec{u}) = R_{\alpha \downarrow} - R_{\alpha \uparrow} \equiv R_{\alpha \downarrow \uparrow} \quad (f_4)$$

donde esta ecuación tiene, además de los términos usuales en hidrodinámica, el correspondiente a las reacciones y contiene la expresión del balance estadístico y el término de difusión.

Esta ecuación es la que debería resolverse para calcular el grado de ionización, pero si el miembro izquierdo es pequeño frente a $R_{\alpha \downarrow}$, la ecuación de balance estadístico usada antes se puede usar a orden cero. Notese que $R_{\alpha \downarrow} \equiv R_{c\downarrow}$ y $R_{\alpha \uparrow} \equiv R_{ic}$ en el caso presente.

La ecuación de conservación del impulso se obtiene multiplicando (f_1) por $m_\alpha \vec{v}$ e integrando, luego para cada especie

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial [n_\alpha m_\alpha (\vec{v}_\alpha + \vec{u})]}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{\pi}_\alpha) + \nabla \cdot (n_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha \vec{v}_\alpha) + \\
& + \nabla \cdot (\vec{u} \vec{v}_\alpha n_\alpha m_\alpha) + \nabla \cdot (\vec{v}_\alpha \vec{u} n_\alpha m_\alpha) + \\
& + \nabla \cdot (\vec{u} \vec{u} n_\alpha m_\alpha) - n_\alpha m_\alpha \vec{G}_\alpha = \vec{P}_{\alpha \downarrow} - \vec{P}_{\alpha \uparrow}
\end{aligned} \quad (f5)$$

donde $\vec{P}_{\alpha \downarrow}$ y $\vec{P}_{\alpha \uparrow}$ representan el impulso ganado y perdido respectivamente por las colisiones. Para llegar a esta expresión se llamó $\vec{w} = \vec{v} - (\vec{v}_\alpha + \vec{u})$ y se supuso que todos los momentos de f_α tienden a cero cuando v tiende a infinito, luego integrando por partes

$$m_\alpha \int \vec{v} \vec{G}_\alpha \cdot \nabla_v f_\alpha d\rho_\alpha^3 = -n_\alpha m_\alpha \vec{G}_\alpha$$

y

$$m_\alpha \int \vec{v} \vec{v} f_\alpha d\rho_\alpha^3 = \vec{\pi}_\alpha + (\vec{v}_\alpha \vec{v}_\alpha + \vec{u} \vec{v}_\alpha + \vec{v}_\alpha \vec{u} + \vec{u} \vec{u}) n_\alpha m_\alpha$$

siendo

$$\vec{\pi}_\alpha = \int \vec{w} \vec{w} m_\alpha f_\alpha d\rho_\alpha^3 \quad \text{y} \quad \int \vec{w} f_\alpha d\rho_\alpha^3 = 0.$$

Como es habitual se puede descomponer el tensor $\vec{\pi}$ en la presión p y el tensor de flujo viscoso $\vec{\zeta}$ (simétrico de trazo nulo)

$$\pi_\alpha = p_\alpha \vec{1} + \vec{\zeta}_\alpha$$

donde $\vec{1}$ es el tensor unitario.

Al sumar sobre el índice α resulta la ecuación de conservación del impulso

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{\pi}) + \sum_{\alpha} \nabla \cdot (\vec{v}_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha}) + \nabla \cdot (\vec{u} \vec{u} \rho) -$$

$$-\vec{F} = \vec{P}_{\downarrow} - \vec{P}_{\uparrow} \equiv \vec{P}_{\downarrow\uparrow} \quad (56)$$

siendo $\vec{\pi} = \sum_{\alpha} \vec{\pi}_{\alpha}$ y $\vec{F} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \vec{G}_{\alpha}$
 la fuerza por unidad de volumen del gas. Es muy usual en astrofísica que
 los términos $\vec{P}_{\downarrow} = \sum_{\alpha} \vec{P}_{\alpha\downarrow}$ y $\vec{P}_{\uparrow} = \sum_{\alpha} \vec{P}_{\alpha\uparrow}$

que al sumar sobre las partículas, representen ganancias y pérdidas de impulso debidas a las colisiones con fotones, sean considerados como una fuerza y expresados como fuerza de radiación igual al gradiente de una presión de radiación; ese planteo es en general incorrecto y lleva a confusión, ya que el término de radiación tiene un origen colisional y debe en todo caso expresarse en ésta ecuación como la divergencia de un tensor que puede incluir la presión de radiación. Aquí, mantendré por separado los términos radiativos, por considerar que en condiciones fuera de LTE, no es útil intentar expresiones sintéticas, y expresaré esos términos por

$$\vec{P}_{\downarrow\uparrow} = \frac{1}{c} \int (\kappa_{\nu} I_{\nu} - \epsilon_{\nu}) d\nu \vec{n} d\omega \quad (57)$$

donde $d\omega$ es el diferencial de ángulo sólido en la dirección \vec{n} .

Esta última expresión puede obtenerse de considerar que el impulso ganado por las partículas coincidirá con el perdido por la radiación, los coeficientes κ_{ν} y ϵ_{ν} están relacionados con los R_{1c} y R_{c1} , como se vio antes, y pueden calcularse fácilmente a partir de los parámetros macroscópicos.

Es frecuente en la literatura la suposición a priori de que en un

sistema de coordenadas particular (el llamado "comoving frame" o del fluido , los coeficientes K_V y E_V son independientes de \vec{n} y entonces se obtiene una expresión aún mas reducida para el término de radiación.

Sin embargo , el apartamiento de la isotropía en esos coeficientes puede dar origen a términos de primer orden en mi planteo, y en este trabajo no se harán suposiciones a priori al respecto.

Finalmente , la ecuación de la energía cinética puede obtenerse multiplicando la (f1) por $m_\alpha \frac{V^2}{2}$ y queda para cada especie

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{\partial p_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{m_\alpha}{2} (\vec{v}_\alpha + \vec{u}) \cdot \vec{n}_\alpha \right] + \nabla \cdot \vec{Q}_\alpha + \nabla \cdot \left[\frac{m_\alpha}{2} (\vec{u} + \vec{v}_\alpha) (u + v_\alpha)^2 n_\alpha \right] + \\ + \nabla \cdot \left[\frac{3}{2} p_\alpha (\vec{u} + \vec{v}_\alpha) \right] + \nabla \cdot \left[\vec{\pi}_\alpha \cdot (\vec{v}_\alpha + \vec{u}) \right] - \end{aligned} \quad (f8)$$

$$- m_\alpha m_\alpha G_\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}_\alpha) = E_{\alpha\downarrow} - E_{\alpha\uparrow} \equiv E_{\alpha\downarrow\uparrow}$$

pues

$$\int m_\alpha w^2 f_\alpha d p_\alpha^3 = \text{traza}(\vec{\pi}_\alpha) = 3 p_\alpha$$

$$\int m_\alpha \frac{v^2}{2} \nabla \cdot f_\alpha d p_\alpha^3 = - \int m_\alpha \vec{v} f_\alpha d p_\alpha^3 = - m_\alpha m_\alpha (\vec{u} + \vec{v}_\alpha)$$

y se denomina

$$\vec{Q}_\alpha = \int \frac{m_\alpha}{2} w w^2 f_\alpha d p_\alpha^3$$

$\mathcal{E}_{\alpha\downarrow}$ y $\mathcal{E}_{\alpha\uparrow}$ representan la energía cinética ganada y perdida respectivamente por la especie α debido a las colisiones.

Sumando sobre α resulta

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{3}{2} \rho \vec{u} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{3}{2} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \right) + \nabla \cdot \vec{q} - \vec{F} \cdot \vec{u} - \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \vec{G}_{\alpha} \cdot \vec{v}_{\alpha} + \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \frac{v_{\alpha}^2}{2} \right) + \nabla \cdot (\vec{\pi} \cdot \vec{u}) + \nabla \cdot \left(\sum_{\alpha} \vec{\pi}_{\alpha} \cdot \vec{v}_{\alpha} \right) + \\ & + \nabla \cdot \left(\vec{u} \rho \frac{u^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left[\sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} (\vec{v}_{\alpha} \cdot \vec{u}) \right] + \nabla \cdot \left(\vec{u} \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \frac{v_{\alpha}^2}{2} \right) + \\ & + \nabla \cdot \left(\sum_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \frac{v_{\alpha}^2}{2} \right) = \mathcal{E}_{\downarrow} - \mathcal{E}_{\uparrow} \equiv \mathcal{E}_{\downarrow\uparrow} \end{aligned} \quad (f9)$$

Con $\vec{q} = \sum_{\alpha} \vec{q}_{\alpha}$ el flujo de calor ; $\mathcal{E}_{\downarrow} = \sum \mathcal{E}_{\alpha\downarrow}$ y $\mathcal{E}_{\uparrow} = \sum \mathcal{E}_{\alpha\uparrow}$

Para calcular \mathcal{E}_{\downarrow} y \mathcal{E}_{\uparrow} es necesario tener en cuenta la energía transferida al campo de radiación y también la parte transferida a la energía interna de las partículas (\mathcal{E}_{α}) por lo que sería

$$\mathcal{E}_{\downarrow\uparrow} = \int (\kappa_{\nu} I_{\nu} - \epsilon_{\nu}) dv d\omega - \sum_{\alpha} \mathcal{E}_{\alpha} (R_{\alpha\downarrow} - R_{\alpha\uparrow}) \quad (f10)$$

Las ecuaciones (f6) y (f9) pueden reducirse con la ayuda de las ecuaciones de conservación de masa e impulso y las de balance estadístico.

Resulta la fórmula de Navier-Stokes

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla \cdot \vec{\pi} + \nabla \cdot \left(\sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \right) = \vec{F} + P_{\downarrow\uparrow} \quad (f11)$$

que contiene el término difusivo (último del miembro izquierdo) y la fuerza de radiación . El término difusivo , es de segundo orden en v_α y en el caso presente (en que esa velocidad es de primer orden), resulta despreciable.

Y la fórmula para la energía térmica es

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3}{2} \rho + \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \frac{v_{\alpha}^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left[\vec{u} \left(\frac{3}{2} \rho + \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \frac{v_{\alpha}^2}{2} \right) \right] + \\
 & + \nabla \cdot \left[\sum_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \left(\frac{3}{2} \rho_{\alpha} + n_{\alpha} m_{\alpha} \frac{v_{\alpha}^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \vec{q} + \\
 & + \left[\left(\vec{\pi} + \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \right) \cdot \nabla \right] \cdot u + \nabla \cdot \left(\sum_{\alpha} \vec{\pi}_{\alpha} \cdot \vec{v}_{\alpha} \right) = \\
 & = \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} G_{\alpha} \cdot v_{\alpha} + \varepsilon_{\downarrow \uparrow} - \vec{u} \cdot \vec{P}_{\downarrow \uparrow}
 \end{aligned} \tag{512}$$

En ésta ecuación , el tercer término de la izquierda resulta de tercer orden y los términos que se suman a ρ , ρ_{α} y $\vec{\pi}$ son de segundo orden (si \vec{v}_{α} es de primer orden) . Otro término despreciable frecuentemente es el último del miembro derecho , pues $\frac{u}{c}$ es muy pequeño. Resulta , entonces la ecuación a primer orden

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3}{2} \rho \right) + \nabla \cdot \left(\vec{u} \frac{3}{2} \rho \right) + \nabla \cdot \vec{q} + (\vec{\pi} \cdot \nabla) \cdot \vec{u} + \\
 & + \nabla \cdot \left[\sum_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot \left(\frac{3}{2} \rho_{\alpha} \vec{1} + \vec{\pi}_{\alpha} \right) \right] = \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} G_{\alpha} \cdot \vec{v}_{\alpha} + \varepsilon_{\downarrow \uparrow}
 \end{aligned} \tag{513}$$

usando la descomposición de $\vec{\pi}_\alpha$ y el hecho de que en la distribución maxwelliana perturbada, solo el término $\rho_\alpha \vec{1}$ es de orden cero en esa expansión y resultan las expresiones a primer orden

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p + \nabla \cdot (\vec{\xi}) = \vec{F} + \vec{P}_{\uparrow\uparrow}$$

(f 14)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3}{2} p \right) + \mu \cdot \nabla \left(\frac{3}{2} p \right) + \nabla \cdot \vec{q} + \frac{5}{2} p \nabla \cdot \vec{u} + \\ + \nabla \cdot \left(\sum_\alpha \vec{v}_\alpha \frac{5}{2} p_\alpha \right) = \sum_\alpha n_\alpha m_\alpha \vec{G}_\alpha \cdot \vec{v}_\alpha + \epsilon_{\uparrow\uparrow} \end{aligned}$$

El flujo de calor, suele definirse como $\vec{q} + \sum_\alpha \frac{5}{2} p_\alpha \vec{v}_\alpha$, de manera que en lo que sigue adoptaré esta definición.

En estas ecuaciones, de acuerdo a lo supuesto, es $p_\alpha = n_\alpha kT$ y $p = n kT$, los términos asociados con la perturbación de las funciones de distribución respecto de la maxwelliana, se expresan por los momentos de esa perturbación, y son \vec{v}_α , $\vec{\xi}$, y \vec{q} llamados velocidad de difusión, flujo viscoso y flujo conductivo y en general se consideran asociadas a los coeficientes fenomenológicos de difusión, viscosidad y conductividad térmica, que los vinculan con los gradientes de densidad, velocidad y temperatura. En el caso presente, y por la complejidad del caso que se trata, los flujos estarán dados por expresiones mas complicadas.

Otras ecuaciones que deben resolverse usualmente, asociadas con las hidrodinámicas, son las electromagnéticas, para las cuales, en el caso que tratamos, es importante conocer el valor de la densidad de corriente eléctrica \vec{J}_e (a corriente continua, c.c), este valor, viene expresado por

$$\vec{J}_e = e(n_p \vec{v}_p - n_e \vec{v}_e)$$

siendo $-e$ la carga del electrón, (n_e, v_e) y (n_p, v_p) con las densidades y velocidades de difusión de electrones y protones respectivamente.

En el problema encarado, se ha hecho la hipótesis unidimensional, de manera que, si bien se considera que las partículas pueden tener impulsos en cualquier dirección, las cantidades macroscópicas sólo varían en una dirección, y el sistema de coordenadas se elige de manera que esa dirección coincida con el eje z . Además se hace la hipótesis estacionaria, o sea se desprecian todas las derivadas parciales respecto del tiempo.

2.5 Coefficientes de transporte

Por lo dicho respecto a lo pequeño de los gradientes de los parámetros macroscópicos, las perturbaciones en las funciones de distribución (y por lo tanto en los flujos asociados) serán funciones lineales de $(\nabla x_\alpha, \nabla p, \nabla T, \nabla \vec{u}, \vec{E}, \nabla W, \nabla T_R)$, donde x_α es la concentración de la especie α (en número, o sea $x_\alpha = \frac{n_\alpha}{n}$) y \vec{E} es el campo eléctrico. No consideraré fuerzas de otro origen, como podría ser el campo gravitatorio o el magnético, ya que las primeras no son usualmente importantes y las segundas sólo pueden tratarse consistentemente en casos tridimensionales.

En el sistema de coordenadas elegido, los gradientes de los parámetros macroscópicos estarán en la dirección \vec{z} , así como también el campo eléctrico y para mantener la forma unidimensional, se requiere que $\nabla \vec{u} \equiv \frac{\partial u_z}{\partial z}$, o sea que además sean u_x y u_y constantes.

Las definiciones de los coeficientes de transporte, se dan usualmente en términos de la teoría CHE. Sin embargo, como muestra Fontenla (1983) los coeficientes de transporte pueden obtenerse en la aproximación actual de una descomposición de la función de distribución en partes simétrica y antisimétrica (respecto a μ , o sea al coseno del ángulo entre la velocidad considerada y el eje z) cuando la parte simétrica de la distribución

se considera sólo dependiente de los parámetros macroscópicos locales (a orden cero).

Sintetizando el método CHE, se introduce un parámetro que mide el orden perturbativo, y entonces

$$f = f^{(0)} + \theta f^{(1)} + \theta^2 f^{(2)} + \dots \quad (g1)$$

donde θ es el parámetro de orden, y $f^{(0)}$, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, etc tienen el mismo orden. La ecuación de Boltzmann, se puede desarrollar como

$$\mathcal{L}f = \sum_{r=0}^{\infty} \theta^r \mathcal{L}f^{(r)} = \xi = \sum_{r=0}^{\infty} \theta^r \xi^{(r)} \quad (g2)$$

donde, en el desarrollo de ξ , se define

$$\xi^{(r)} = \xi(f^{(0)}, f^{(r)}) + \xi(f^{(1)}, f^{(r-1)}) + \dots + \xi(f^{(r)}, f^{(0)}) \quad (g3)$$

Si se usa como parámetro de orden el valor $\left(\frac{\ell}{L}\right) \equiv \theta$ resulta ser $\mathcal{L}f^{(r)}$ del orden de $\theta f^{(r)}$ y por lo tanto, igualando los términos del mismo orden en (g2) resulta la serie de ecuaciones

$$\xi^{(0)} = \xi(f^{(0)}, f^{(0)}) = 0 \quad (g4)$$

y

$$\xi^{(r+1)} = \mathcal{L}f^{(r)} \quad \text{con } r=0$$

La primera de estas ecuaciones indica que la solución a orden cero, es la que anula el término de colisiones, y por lo tanto corresponde al caso estacionario, uniforme y de equilibrio respecto a las fuerzas externas. La solución es la distribución de Maxwell

$$f^{(0)} \equiv F = \frac{n}{(2\pi m \beta T)^{3/2}} e^{-\frac{m(v-u)^2}{2\beta T}} \quad (95)$$

o bien

$$\ln F = \ln n - \frac{3}{2} \ln (2\pi m \beta T) - \frac{m(v-u)^2}{\beta T}$$

donde \vec{v} es la velocidad correspondiente del espacio de fase y el elemento de volumen del espacio de fase es $d\phi^3$. En el libro de CHC, se obtiene la solución a orden cero siendo en $f^{(0)}$ una combinación lineal de los invariantes colisionales (en su caso, número de partículas de cada especie, impulso y energía), pero en el caso presente éste no puede aplicarse pues esas cantidades no son invariantes para las partículas (el impulso y la energía lo serían si se considerara también la radiación, en el caso de ETL).

Además, para que esta función F sea la solución a orden cero, debe cumplirse la ecuación de balance estadístico, y la condición de neutralidad eléctrica, que vincularán las densidades de las distintas especies, de manera que en realidad, las n_α no son variables independientes en nuestro problema. Sin embargo, en el planteo se mantendrán explícitamente con fines comparativos y al usar los coeficientes, deberá recordarse que en el planteo actual, resultan

$$n_\alpha = n_\alpha(p_g, T, W, T_R)$$

de acuerdo a lo anteriormente expresado.

Definiendo el operador integrodiferencial I como

$$I(\phi^{(r+1)}) = -\mathcal{L} f^{(r)} - \xi(f^{(1)}, f^{(r)}) - \dots - \xi(f^{(r)}, f^{(1)})$$

siendo

$$f^{(r)} = f^{(0)} \phi^{(r)}$$

la segunda de las ecuaciones (94) puede expresarse

$$I(\phi^{(r+1)}) = 0$$

resultando según el libro CHC

$$I(\phi^{(r)}) = K_0(\vec{p}) \phi^{(r)} + \int K(\vec{p}, \vec{p}_B) \phi_B^{(r)} d\vec{p}_B^3$$

Con K_0 y K , funciones, siendo la última de ellas simétrica respecto al intercambio de \vec{p} y \vec{p}_B .

De la teoría de ecuaciones integrales resulta que las ecuaciones (96) tienen solución si y solo si las "condiciones de ortogonalidad asociadas" se satisfacen,

$$\int \psi^{(i)} \left[\mathcal{L} f^{(r)} + \mathcal{E}(f^{(r)}, f^{(r)}) + \dots + \mathcal{E}(f^{(r)}, f^{(i)}) \right] d\vec{p}^3 = 0 \quad (97)$$

siendo $\psi^{(i)}$ la iésima solución independiente de la ecuación integral homogénea, $I(\psi^{(i)}) = 0$.

De manera que la condición necesaria y suficiente para obtener soluciones a las ecuaciones (96) y por lo tanto a las (94) es que

$$\int \mathcal{L} f^{(r)} \psi^{(i)} d\vec{p}^3 = 0 \quad (98)$$

Estas condiciones de ortogonalidad son tres (una es triple).

Y en el caso analizado por CHC corresponden a los invariantes de colisiones $(n, \vec{p}, \mathcal{E})$ y a los parámetros (n, \vec{u}, T) . La situación resulta mas complicada en el caso presente, donde los parámetros serían $(\beta, \vec{u}, T, W, T_R)$, pero como no usaré el método CHE, sólo he tenido en cuenta la compatibilidad en las definiciones de los coeficientes de transporte.

Tampoco me detendré en el análisis de todas las posibles soluciones a la ecuación de Boltzmann, y sólo mencionaré, que las soluciones del método CHE, son de la clase denominada como "soluciones normales" (una discusión sobre el tema se da en Grad, 1958, pag 241 y 266).

Los coeficientes de transporte tal como se definen habitualmente corresponden a la aproximación de primer orden en θ , o sea

$$\mathcal{L} f^{(0)} = \xi^{(1)} \quad (89)$$

Si el operador \mathcal{L} se transforma al sistema con variable independiente $v' = v - u$, deben sustituirse

$$\frac{\partial f}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial t'} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial t'} \cdot \nabla_{v'} f \quad (90)$$

y

$$\nabla f \longrightarrow \nabla' f - (\nabla' \vec{u}) \cdot \nabla_{v'} f$$

En nuestro caso, todas las derivadas respecto al tiempo se desprecian y resulta

$$\mathcal{L} f = (\vec{v}' + \vec{u}) \cdot [\nabla' f - (\nabla' \vec{u}) \cdot \nabla_{v'} f] + \vec{G} \cdot \nabla_{v'} f \quad (91)$$

además, para simplificar se puede elegir el sistema en el que \vec{u} sea cero para el punto en que se evalúan los fenómenos de transporte (será diferente de cero en un entorno de ese punto), es

$$\mathcal{L} f = v' \cdot \nabla' f + \vec{G} \cdot \nabla_{v'} f - v' \cdot (\nabla' \vec{u}) \cdot \nabla_{v'} f \quad (92)$$

y como la aceleración que figura aquí es la de equilibrio, por la ecuación hidrodinámica correspondiente es $\vec{G} = \frac{1}{\rho} \nabla p$.

Reemplazando la expresión explícita de f (95), resulta

$$\begin{aligned}\xi^{(1)} &= \xi(f^{(0)}, f^{(1)}) + \xi(f^{(1)}, f^{(0)}) = I(\phi^{(1)}) = \\ &= -f^{(0)} \left[\left(x^2 - \frac{5}{2} \right) v' \cdot \nabla \ln T + 2 (\vec{x}^0 \vec{x}) : \nabla \vec{u} \right] \quad (913)\end{aligned}$$

donde $\vec{x} = \sqrt{\frac{m v'^2}{2 k T}} \left(\frac{\vec{x}'}{v'} \right)$

y $(\vec{x}^0 \vec{x})$ es la díada con la traza restada (• sea que es de traza nula).

Evaluando las posibles soluciones de la ecuación (913) y las condiciones de resolubilidad, se concluye que

$$\phi^{(1)} = -v_T \vec{A} \cdot \nabla \ln T - 2 \vec{B} : \nabla \vec{u} \quad (914)$$

donde \vec{A} y \vec{B} obedecen las ecuaciones

$$\begin{aligned}I(\vec{A}) &= f^{(0)} \left(x^2 - \frac{5}{2} \right) \vec{x} \\ I(\vec{B}) &= f^{(0)} (\vec{x}^0 \vec{x})\end{aligned} \quad (915)$$

En el método CHE el vector \vec{A} y el tensor \vec{B} se calculan usando los polinomios de Senine (relacionados a los generalizados de Laguerre), a partir de los cuales se sigue un método de aproximaciones sucesivas y se resuelven las ecuaciones (915) en forma aproximada para distintos potenciales de interacción. En éste proceso, suele mencionarse con que orden de aproximación fueron calculadas las funciones \vec{A} y \vec{B} , o los coeficientes de transporte asociados, sin embargo, éste es independiente del orden del desarrollo en θ , que es siempre el primero.

Si, a partir de las funciones (914), se calcula el flujo de calor, resulta

$$\vec{q} = \frac{m}{2} \int f^{(1)} v^2 \vec{x} dp^3 = -\lambda \nabla T \quad (916)$$

siendo

$$\lambda = \frac{2 k^2 T}{3 m} \int \vec{A} \cdot I(\vec{A}) d\rho^3$$

que constituye la definición de conductividad térmica λ .

Por otra parte, se calculan los tensores de flujo viscoso y resulta el coeficiente de viscosidad ,

$$\vec{\xi} = m \int f^{(1)} \vec{v} \vec{v} d\rho^3 = -2 n \nabla^0 \vec{u} \quad (9.17)$$

con

$$\eta = \frac{2}{5} k T \int \vec{B} : I(\vec{B}) d\rho^3$$

y donde $\nabla^0 \vec{u}$, es la díade a la que se ha restado la divergencia de \vec{u} entences

$$\begin{aligned} \pi_{xx} &= p - \frac{2}{3} \eta \left(2 \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\ \pi_{yz} &= -\eta \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

En un gas simple como el mencionado, la viscosidad resulta transversal, sin embargo en casos mas generales, aparece la llamada "viscosidad volumétrica", en cuyo caso aparece una perturbación en la presión, debida a la divergencia de la velocidad, en éste caso es

$$\begin{aligned} \vec{\pi} &= p \vec{1} - 2 m \int f^{(1)} \vec{v} \vec{v} (\vec{B} : \nabla \vec{u} + B \nabla \cdot \vec{u}) d\rho^3 = \\ &= p \vec{1} - 2 \eta \nabla^0 \vec{u} - \omega \vec{1} \nabla \cdot \vec{u} \quad (9.18) \end{aligned}$$

donde el coeficiente de viscosidad volumétrica es ω .

En el planteo realizado hasta aquí, se consideró sólo una especie de partículas, si ahora se estudia una mezcla de componentes, se puede seguir un esquema similar.

En el libro CHC se ha tratado en detalle el caso de un gas de dos componentes, es ese caso aparecen los coeficientes de difusión mutua y difusión térmica. En éste trabajo, se seguirá la idea de Devoto (1966) de generalizar esos conceptos al caso presente.

Para ello, se definen las "fuerzas diferenciales de la especie β ", por

$$\begin{aligned} \vec{d}_{\alpha\beta} &= \frac{\rho_\alpha \rho_\beta}{\rho p} \left[\left(G_\beta - \frac{1}{\rho_\beta} \nabla p_\beta \right) - \left(G_\alpha - \frac{1}{\rho_\alpha} \nabla p_\alpha \right) \right] = \\ &= C_\alpha \left(\frac{\rho_\alpha + \rho_\beta}{\rho} \right) \nabla \ln p_\alpha - \frac{\rho_\alpha \rho_\beta (G_\alpha - G_\beta)}{\rho p} - \frac{\rho_\alpha}{\rho} \nabla \ln p \end{aligned} \quad (g 19)$$

donde

$$\rho_\alpha = n_\alpha m_\alpha \quad ; \quad C_\alpha = \frac{n_\alpha}{n} = \frac{\rho_\alpha}{\rho}$$

y

$$\nabla p = \nabla p_\alpha + \nabla p_\beta$$

(para el caso estático resulta, con esa definición, $\nabla p = \vec{F}$; $\vec{d}_{\alpha\beta} = \left(\frac{\rho_\alpha + \rho_\beta}{\rho} \right) \frac{\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \vec{G}_\alpha}{p}$)

$$\mathcal{L} f_\alpha^{(0)} = f_\alpha^{(0)} \left[\left(\chi_\alpha^2 - \frac{5}{2} \right) \vec{v}' \cdot \nabla \ln T + \frac{1}{C_\alpha} \vec{v}' \cdot \vec{d}_{\alpha\beta} + 2 (\vec{\chi}_\alpha^2 \circ \vec{\chi}_\alpha^2) : (\nabla \vec{u}) \right]$$

y

$$\phi_\alpha^{(1)} = -\vec{A}_\alpha \cdot \nabla \ln T - \vec{D}_{\alpha\beta} \cdot \vec{d}_{\alpha\beta} - 2 \vec{B}_\alpha : (\nabla \vec{u}) \quad (g 20)$$

de aquí se concluye que si se considera la difusión de partículas de la especie α respecto a la especie β , la velocidad correspondiente estará dada por

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{n_\alpha} \int f_\alpha^{(1)} \vec{v} d\rho_\alpha^3 - \frac{1}{n_\beta} \int f_\beta^{(1)} \vec{v} d\rho_\beta^3 = \vec{v}_\alpha - \vec{v}_\beta = \\
&= -\frac{1}{3} \left[\left\{ \frac{1}{n_\alpha} \int f_\alpha^{(0)} \vec{v} \cdot \vec{D}_{\alpha\beta} d\rho_\alpha^3 - \frac{1}{n_\beta} \int f_\beta^{(0)} \vec{v} \cdot \vec{D}_{\alpha\beta} d\rho_\beta^3 \right\} \vec{d}_{\alpha\beta} + \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \frac{1}{n_\alpha} \int f_\alpha^{(0)} \vec{v} \cdot \vec{A}_\alpha d\rho_\alpha^3 - \frac{1}{n_\beta} \int f_\beta^{(0)} \vec{v} \cdot \vec{A}_\beta d\rho_\beta^3 \right\} \nabla \ln T \right] = \\
&= \frac{-1}{3n} \left[\{ \vec{D}, \vec{D} \} \vec{d}_{\alpha\beta} + \{ \vec{D}, \vec{A} \} \nabla \ln T \right]
\end{aligned} \tag{921}$$

en la última igualdad las llaves se definen por los términos correspondientes de la anterior igualdad.

Analizando la expresión (921) se ve que la difusión se produce debido a la inhomogeneidad del gas en la composición, a la diferente fuerza que experimentan las partículas (por acciones externas), al gradiente de la presión, y a la temperatura.

Comparando con el caso simple de la mezcla de dos gases a presión y temperatura uniformes, se ve que el llamado coeficiente de difusión mutua de la especie α por la especie β es

$$D_{\alpha\beta} = \frac{n_\alpha n_\beta}{3n} \{ \vec{D}, \vec{D} \}$$

La constante de difusión térmica es

$$D_{\alpha\beta}^T = \frac{n_\alpha n_\beta}{3n} \{ \vec{D}, \vec{A} \}$$

y suele definirse el coeficiente de difusión térmica por la relación

$$\beta_T = \frac{D_{\alpha\beta}^T}{D_{\alpha\beta}}$$

En el caso presente, puede extenderse la definición de los coeficientes de difusión térmica en forma sencilla, pero para la extensión de la noción de coeficiente de difusión mutua es necesario suponer como condición adicional, que las definiciones de los coeficientes $D_{\alpha\beta}$, se refieran a la velocidad de difusión relativa $\vec{v}_{\alpha\beta}$ cuando la concentración de la especie β varía, manteniéndose constantes las de las demás especies, excepte la α . De ésta definición resulta que $D_{\alpha\alpha}$ debe ser nula y ($D_{\alpha\beta} = D_{\beta\alpha}$) simétrica.

En el caso de un gas de varias especies, también se complica la expresión de la conductividad térmica, como se ve en la ecuación (f14).

Por otra parte, si se multiplica $\vec{v}_{\alpha\beta}$ por $n_\beta m_\beta$ y se suma sobre β resulta la expresión

$$\sum_{\beta} n_{\beta} m_{\beta} (\vec{v}_{\alpha} - \vec{v}_{\beta}) = \rho \vec{v}_{\alpha}' = - \sum_{\beta} D_{\alpha\beta} \rho_{\beta} \vec{d}_{\alpha\beta} - \rho D_{\alpha}^T \nabla \ln T \quad (g23)$$

$$D_{\alpha}^T = \sum_{\beta} D_{\alpha\beta}^T \frac{\rho_{\beta}}{\rho}$$

que nos da la velocidad de difusión de la especie α respecto del centro de masa, tal como fué definida en las ecuaciones hidrodinámicas.

Definiendo un \vec{d}_{α} apropiado

$$\vec{d}_{\alpha} = \sum_{\beta} \vec{d}_{\alpha\beta}$$

$$\vec{d}_\alpha = \nabla c_\alpha + \left(c_\alpha - \frac{p_\alpha}{p}\right) \nabla \ln p - \frac{p_\alpha}{p} \left(\frac{p \vec{G}_\alpha - \vec{F}}{p}\right) \quad (824)$$

se puede utilizar la expresión

$$\vec{v}_\alpha' = \frac{n}{c_\alpha p} \sum_\beta m_\alpha D_{\alpha\beta} \vec{d}_\beta - \frac{D_{\alpha}^T}{p_\alpha} \nabla \ln T \quad (825)$$

y el flujo de calor que resulta

$$\begin{aligned} q' \equiv \left(q + \sum_\alpha \frac{5}{2} p_\alpha v_\alpha'\right) &= - \left(\lambda^p \nabla T + p \sum_\beta \frac{D_\beta^T \vec{d}_\beta}{p_\beta}\right) + \\ &+ \sum_\alpha \frac{5}{2} p_\alpha v_\alpha' \end{aligned} \quad (826)$$

donde λ^p no es la conductividad térmica λ que se define habitualmente la llamaré "conductividad térmica prima". La definición usual de λ es el coeficiente del gradiente de temperatura en la expresión del flujo de calor, cuando todas las velocidades de difusión son nulas (en este caso coincide q' con q). A partir de las ecuaciones (825) se pueden despejar los \vec{d}_β en función de $\nabla \ln T$ y obtener

$$\vec{q}' = \sum_\alpha \left(\frac{5}{2} p_\alpha - \frac{p p_\alpha}{n^2 m_\alpha} \sum_\beta \frac{D_\beta^T E_{\beta\alpha}}{p_\beta} \right) \vec{v}_\alpha' - \lambda \nabla T \quad (827)$$

siendo $E_{\beta\alpha}$ los elementos de la matriz inversa de $(D_{\beta\alpha} m_{\alpha})$.

De aquí se obtendría comparando con (926)

$$\lambda = \lambda^p + \frac{\rho^p}{n} \sum_{\alpha, \beta} \frac{E_{\alpha\beta} D_{\alpha}^T D_{\beta}^T}{\rho_{\alpha} m_{\beta}} \quad (928)$$

Este último es el tratamiento seguido por Devoto (1966), que es muy general. En el próximo capítulo, analizaré el problema de los coeficientes de transporte en más detalle y en relación con el gas específico que se trata. Por el momento, basta considerar que de acuerdo a la definición de CHE para determinar la conductividad térmica, deben expresarse las demás "fuerzas termodinámicas" en términos del gradiente de temperatura por medio de las ecuaciones que anulan las velocidades de difusión mutua, y reemplazar esas fuerzas en las ecuaciones (926).

La gran aceptación de los coeficientes de transporte λ y n que resultan del método CHE, se debe a que ellos corresponden con las definiciones de los coeficientes ortogonales que aparecen, cuando se expresa la variación de la entropía S en el sistema del fluido $(\frac{dS}{dt} - \frac{\partial S}{\partial t} + (\mu \cdot \nabla) S)$, para estados cercanos al equilibrio termodinámico. De acuerdo al desarrollo del teorema H de Boltzman, esa variación de entropía resulta

$$\frac{dS}{dt} = - \sum_i \mathcal{C}_i |\nabla H_i|^2 \quad (929)$$

donde H_i son los parámetros macroscópicos y \mathcal{C}_i los coeficientes de transporte. A ∇H_i se lo suele denominar "fuerza termodinámica" y \mathcal{C}_i depende solamente de los parámetros macroscópicos.

Aquí estriba la mayor dificultad para el caso que nos ocupa , pues en nuestro caso , el estado que llamamos de equilibrio no es el estado de equilibrio termodinámico (de máxima entropía) y ni siquiera es el de equilibrio termodinámico local . Por esto , la variación de la entropía tendrá una forma más complicada y los términos que resulten no tendrán en general signo definido (al contrario del caso típico del teorema H) .

2.6 Plasmas ideales

En los plasmas totalmente ionizados, la definición de difusión mutua, tiene una estrecha relación con la conductividad eléctrica , ya que de acuerdo a la fórmula anterior

$$\vec{d}_{ep} = c_e \nabla \ln p_e + \frac{p_e p_p}{p p} (\vec{E} e) \left(\frac{1}{m_e} - \frac{1}{m_p} \right) - \frac{p_e}{p} \nabla \ln p \quad (L1)$$

de manera que es

$$\vec{v}_{ep} = - (D_{ep} \vec{d}_{ep} + D_{ep}^T \nabla \ln T) \quad (L2)$$

Sin embargo , si se considera también la ecuación de Poisson para el campo eléctrico autoconsistente , es (en unidades cgs)

$$\nabla \cdot \vec{E} = -4\pi n e (c_p - c_e) \quad (L3)$$

donde $-e$ es la carga del electrón y se suponen los iones de carga e , suponiendo que la longitud característica de variación de c_e es L , los campos eléctricos que se producirían podrían ser del orden

$$|E| \sim 4\pi n e L c_e \quad (L4)$$

y comparando entonces los términos dentro de la expresión de \vec{d}_{ep} , debidos al gradiente de concentración y al campo eléctrico, resulta

$$\vec{d}_{ep} = \nabla C_e + \frac{n_e n_p}{n_p p} (m_p - m_e) (\nabla p + n e \vec{E})$$

• sea

$$\vec{d}_{ep} \sim \frac{C_e}{L} + C_e \left(\frac{1}{L} + \frac{n e \vec{E}}{p} \right) \quad (h5)$$

y si se supone que en el origen es $C_e = C_p = \frac{1}{2}$, o sea el plasma es neutro, y existiera ese gradiente de concentraciones se generaría un campo eléctrico que produciría un término en \vec{d}_{ep} mucho mas importante que el de la difusión mutua común, ya que

$$\vec{d}_{ep} \sim \frac{C_e}{L} + C_e \left(\frac{1}{L} + \frac{4\pi e^2 n}{kT} L \right) \quad (h6)$$

y los dos primeros términos en relación al último son del orden de $\left(\frac{\ell_D}{L}\right)^2$, que como, antes se dijo, es un número muy pequeño.

Por esto, en plasmas se puede despreciar efectivamente el término ∇C_e en la expresión de \vec{d}_{ep} y se supone que esta fuerza es

$$\vec{d}_{ep} = C_e \frac{n e}{p} \vec{E} \approx \frac{n_e}{p} e \vec{E} \quad (h7)$$

pues es $p_p \approx p$, ya que $n_e \approx n_p$ como consecuencia de que \vec{d}_{ep} es una cantidad considerada pequeña.

Y si se analiza la densidad de corriente eléctrica neta, producida por la difusión mutua de electrones y protones, resulta por la (h2)

$$\begin{aligned}\vec{j}_e &= n e (D_{ep} \vec{d}_{ep} + D_{ep}^T \nabla \ln T) = \\ &= \left(\frac{n_e^2 e^2}{\beta T} 2 D_{ep} \right) \vec{E} + (n_e e 2 D_{ep}^T) \nabla \ln T\end{aligned}\quad (28)$$

donde los coeficientes de \vec{E} y $\nabla \ln T$ son conocidos como conductividad y coeficiente termoeléctrico respectivamente. Por lo tanto, en este caso, sólo tiene sentido la consideración del campo eléctrico autoconsistente como "fuerza termodinámica" y resultan las expresiones usuales

$$\begin{aligned}\vec{j}_e &= \sigma \vec{E} + \alpha \nabla T \\ \vec{q} &= -\beta \vec{E} - \lambda \nabla T\end{aligned}\quad (29)$$

donde los coeficientes α y β están relacionados por la fórmula de Onsager

$$\beta = T \alpha + \frac{5 \beta T}{2 e} \sigma \quad (30)$$

La conductividad térmica usual corresponde al caso en que es $j_e = 0$ y se puede definir calculando el campo que anule la corriente (equivalente a anular la velocidad de difusión mutua).

$$\begin{aligned}\vec{E}_T &= - \frac{\alpha}{\sigma} \nabla T \\ \lambda &= \lambda' - \beta \frac{\alpha}{\sigma}\end{aligned}$$

$$\lambda = \epsilon \lambda^p$$

$$\epsilon = \left(1 - \frac{\alpha \beta}{\sigma \lambda^p} \right)$$

donde ϵ es el factor de reducción de la conductividad térmica .

Los cálculos de Cohen , Spitzer y Routly (1950) y Spitzer y Harm (1953), demuestran que los métodos numéricos para resolver la ecuación cinética (con término de colisiones de Fokker-Planck) dan excelentes resultados , cuando se comparan con los muy engorrosos del método CHE a órdenes (en los polinomios de Sonine) mayores que el primero . Por otra parte , el primer orden del método CHE de valores muy diferentes de los órdenes siguientes (para la conductividad eléctrica aproximadamente la mitad según Landshoff (1951)),

En los trabajos en plasmas , como se dijo , se adopta la forma $f = F(1 + \phi)$ tal como en el caso del desarrollo perturbativo que es la base del método CHE a primer orden . La diferencia estriba en que , mientras en el método CHE se desarrolla ϕ en polinomios de Laguerre \mathcal{L}_j

$$\phi(x) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} x \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \left[\frac{\Delta \phi_j^{(n)}}{\Delta^{(n)}} \right] \mathcal{L}_j^{(3/2)}(x^2) \quad (L11)$$

donde los cocientes $\left[\Delta \phi_j^{(n)} / \Delta^{(n)} \right]$ se determinan a partir de las colisiones , en otros métodos se obtiene una ecuación diferencial para ϕ que se integra numéricamente . Los resultados de Spitzer y Härm (1953) son (en unidades cgs electrostáticas)

$$\sigma = \frac{2 m_e v_T^3}{e^2 \ln \Lambda} \frac{\gamma_E}{(\pi)^{3/2}} \quad ; \quad \gamma_E = 0.582$$

$$\alpha = \frac{3 m_e k v_T^3}{e^3 \ln \Lambda} \frac{\gamma_T}{(\pi)^{3/2}} \quad ; \quad \gamma_T = 0.273$$

$$\beta = \frac{4 m_e^2 n_T^5 \delta_E}{e^3 \ln \Lambda (\pi)^{3/2}} ; \delta_E = 0.465$$

$$\lambda^p = \frac{10 m_e^2 b^2 n_T^5 \delta_T}{e^4 \ln \Lambda (\pi)^{3/2}} ; \delta_T = 0.225 \quad (h12)$$

$$\epsilon = 1 - \frac{3 \delta_E \delta_T}{5 \delta_T \delta_E} ; \epsilon = 0.419$$

De aquí resultan

$$\sigma \propto T^{3/2}$$

$$\alpha \propto T^{3/2}$$

$$\beta \propto T^{5/2}$$

$$\lambda \propto T^{5/2}$$

(h13)

Pero ese trabajo presenta además las funciones ϕ en los casos de campo eléctrico aplicado $\phi \equiv \mu \phi_E E$ y gradiente de temperatura.

$\phi \equiv \mu \phi_T \nabla T$. Esos resultados se muestran mas adelante cuando se comparan con los obtenidos por el método que he desarrollado.

2.7 Validez de los coeficientes

En la primitiva imagen de los fenómenos de transporte, esta subyacente la imagen de la interacción entre partículas como entre esferas rígidas. En ese caso, puede definirse un libre camino medio ℓ , independiente de la velocidad de las partículas, y entonces se pueden caracterizar los casos en que $\ell \ll L$.

Sin embargo , en las interacciones más realistas , la dispersión de velocidades de las partículas y la variación de la sección eficaz con la velocidad , hace que en realidad haya un intervalo de valores de ℓ que en el caso de los potenciales r^{-1} va hasta el infinito para partículas rápidas.

Las partículas de velocidad suficientemente alta $v \gtrsim v_L$, que tienen libres caminos medios $\ell_r > L$, forman la parte de la distribución , que suele llamarse "cola no-térmica" (non thermal tail) o componente "free-streaming", y representan un problema diferente del de la "componente térmica" al cual nos referimos antes .

La cola no-térmica presenta un límite a la validez del planteo antes mencionado , pues cuando una parte significativa de las partículas que producen el flujo de cantidades macroscópicas pertenecen a esa parte de la distribución , carece de sentido intentar definir coeficientes de transporte , pues el problema deja de ser local y se transforma en global. Existen , sin embargo situaciones donde , para las partículas de la componente térmica , puede no ser $\theta \equiv \left(\frac{\ell}{L}\right)$ un valor muy pequeño , pero aún no tan grande como para que dejen de pertenecer a esa componente. En ésta situación , el planteo CHE pierde su validez y sería necesario considerar varios términos en el desarrollo en potencias de θ . Esto no fué hecho aún y sería un trabajo ciclópeo .

En el trabajo Fontenla (1983) , se muestra cómo el método que aquí utilizó , podría aplicarse a este problema por medio de un esquema iterativo y hallar los verdaderos flujos de cantidades macroscópicas para estos casos , que podríamos llamar de gradientes moderados de los parámetros macroscópicos .

Sin embargo , en éste trabajo me he limitado a lo que sería la primera iteración en ese proceso y que proporciona los coeficientes de transporte, pues para la aplicación del método que he sugerido se requiere una computadora de mayor envergadura que las que se disponen en el país actualmente .

Como paliativo para ésta situación, existe la posibilidad de obtener factores de reducción del flujo de calor por conductividad térmica. Esos factores de reducción suponen una limitación en los valores de ϕ , debida a la restricción física de que la función de distribución no puede ser negativa por su definición.

Puede verse, que se acuerdo a la expansión en polinomios de Laguerre del método CHE, es $\phi \rightarrow +\infty$ para $x \rightarrow \infty$ y por lo tanto existe un x_c tal que si $x > x_c$ es $|\phi| > 1$, luego; para algunos ángulos entre la velocidad y el gradiente de temperatura (ν sería el factor de proyección correspondiente), la función de distribución sería negativa.

La cuestión no sería importante si las partículas para las que se obtienen estos valores de f sin significado físico, no contribuyeran al fenómeno de transporte que nos interesa. Se puede comprobar que el valor de x_c está relacionado con \angle por

$$1 = |\phi_T(x_c) \nabla T| = \frac{T}{L} |\phi_T(x_c)| \quad (L14)$$

Este es el caso analizado por Shvarts y otros (1981) en el cual se plantea la ecuación cinética para un plasma.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mu v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{eE}{m} \left(\mu \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{(1-\mu^2)}{v} \frac{\partial f}{\partial \mu} \right) = \xi \quad (L15)$$

Se realizan fuertes suposiciones, que tienen su justificación en el anterior trabajo de Spitzer y Harm, se adopta $\phi(\mu, x) = \mu \psi(x)$ y la forma de Kreek (19) del término de colisiones $\xi = \left(\frac{f_0 - f}{\tau} \right)$ con $\nu(r) = \frac{\lambda(r)}{\tau}$ siendo $\nu(r)$ la frecuencia de colisiones y $\lambda(r)$ el libre camino medio. Aplicando la condición de anular la corriente eléctrica queda

$$\psi = \frac{\lambda}{L} (x^2 - 4.0) \quad (h 16)$$

y siendo $\lambda/\lambda_T = (v/v_T)^4$ para un potencial de interacción coulombiano , donde $\lambda_T \equiv \ell$ es el libre camino medio para las partículas de velocidad térmica y $L^{-1} = \nabla \ln T$, como antes , resulta

$$\psi = \frac{\ell}{L} x^4 (x^2 - 4.0) \quad (h 17)$$

Esta expresión es exacta solamente para un gas de Lorentz , pues en ese caso , la forma de Krook es válida y lo es la expresión (h 17).

En el trabajo de Shvarts y otros (1981) , se adopta como un rango razonable para la aplicación de la técnica de "corte" los valores que cumplen $(\ell/L) \leq 0.1$.

Esta técnica que esos autores introducen , consiste en limitar el valor de $\psi(x)$ a su máximo valor $\psi_M(x)$, que será cercano a 1. El caso de $\psi \geq 1$, implica que la distribución de partículas , tiene una muy importante anisotropía .

Se calcula entonces el campo eléctrico E_T que anula la corriente .

El flujo de calor , al integrar en las velocidades , se separa en dos intervalos , uno de $v \leq v_c$ y otro de $v > v_c$, tomándose en el primero los valores usuales de $\psi(x)$, y en el segundo $\psi = \psi_M \equiv \psi(x_c)$. 0 , como proponen para suavizar el "corte" , se puede usar , para calcular el campo E_T y el flujo de calor , la función $\psi' = (\psi^{-1} + \psi_M^{-1})^{-1}$.

Mediante éste método se obtienen coeficientes de reducción del flujo conductivo para el rango $0.001 < (\ell/L) < 0.1$ que van desde 0.9 hasta 0.1 respectivamente .

CAPITULO III

METODO

Método

De acuerdo a lo que se dijo antes , las ecuaciones cinéticas que se resolverán se pueden escribir de la siguiente manera

$$\frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\beta} \cdot \nabla f + \vec{\phi} \cdot \nabla_{\vec{\beta}} f = \xi \quad (rd 1)$$

siendo $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$, $\vec{\phi} = \frac{\vec{G}}{c}$ y

$$\xi = \eta + \psi_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial \beta_i \partial \beta_j} - \phi'_i \frac{\partial f}{\partial \beta_i} - (\chi + \chi') f \quad (rd 2)$$

En ésta fórmula del término de colisiones , están contenidos los términos de Boltzmann

$$\xi_{bol} = \eta - \chi f \quad (rd 3)$$

y los de Fokker-Planck , que pueden escribirse en general como

$$\xi_{FP} = \psi_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial \beta_i \partial \beta_j} - \phi'_i \frac{\partial f}{\partial \beta_i} - \chi' f \quad (rd 4)$$

Más adelante se referirá la forma detallada en que se calcularon esos coeficientes , aquí sólo mencionaré que tanto los coeficientes η y χ como los ψ_{ij} , ϕ'_i , χ' deben obtenerse como suma de los debidos a las interacciones entre las partículas consideradas (A) y cada uno de los restantes "tipos" de partículas (B) . Estas últimas incluyen las partículas de la misma especie que A pero con diferente velocidad .

Para simplificar las largas fórmulas , en lo que sigue no explicitaré las \sum_B y simplemente debe tenerse en cuenta que cuando se efectúa la integración sobre dp_B^3 , debe también sumarse para todos los "tipos" de partículas , excluyendo el A .

3.1 Resolución de las ecuaciones cinéticas

En el presente trabajo se sigue el método propuesto por Fontenla (1983) .

De acuerdo a ese trabajo es

$$\frac{\partial}{\partial p_i} = mc \frac{\partial}{\partial p_i} = \frac{m_i}{\gamma^3} \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{(\delta_{iz} - \mu m_i)}{\gamma \beta} \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{(m_y \delta_{ix} - m_x \delta_{iy})}{\gamma \beta (1 - \mu^2)} \frac{\partial}{\partial \varphi} ; \quad (a1)$$

en el caso presente , no relativista , se puede tomar $\gamma = 1$.

Aquí desarrollaremos los cálculos para el caso unidimensional , es decir que los parámetros físicos son solamente función de una coordenada espacial y se suponen estacionarios . Nótese que esta suposición afecta los parámetros macroscópicos solamente , y no restringe en absoluto la consideración de la distribución en tres dimensiones de las velocidades de las partículas . También se ve que para poder mantener un planteo unidimensional , sólo se puede admitir flujos de radiación , campos eléctricos o magnéticos (o fuerzas en general) en la dirección del gradiente de los parámetros macroscópicos .

En las condiciones mencionadas , y si se toma un sistema de coordenadas con el eje z en la dirección del gradiente de los parámetros macroscópicos , el sistema resultante al no tener otro eje "privilegiado", tiene simetría axial respecto al eje z . Por esto , los flujos deben tener la dirección del eje z y si se admite que las funciones de distribución son soluciones "normales" de las ecuaciones cinéticas , las funciones de distribución solo dependerán de z , β y μ , en la nomenclatura antes utilizada . Y por lo tanto , se considerarán nulas , las derivadas de las funciones de distribución respecto a t , x , y , φ .

En el caso unidimensional entonces la (*ad1*) se escribe

$$\mu \beta \frac{\partial f}{\partial \beta} + \phi_3 \frac{\partial f}{\partial \beta_3} = \xi \quad (a2)$$

y por otra parte , tomando la expresión (a1) resulta

$$m_c \frac{\partial f}{\partial \beta_i} = n_i \frac{\partial f}{\partial \beta} + \frac{(\delta_{i3} - \mu n_i)}{\beta} \frac{\partial f}{\partial \mu} \quad (a3)$$

que junto con las relaciones que se deducen de la geometría

$$\frac{\partial \beta}{\partial \beta_i} = \frac{\beta_i}{\beta} = n_i$$

$$\frac{\partial n_j}{\partial \beta_i} = \frac{1}{\beta} \delta_{ij} - \frac{\beta_j}{\beta^2} \frac{\partial \beta}{\partial \beta_i} = \frac{\delta_{ij} - n_i n_j}{\beta}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial \beta_i} = \frac{\delta_{i3} - \mu n_i}{\beta} \quad (a4)$$

$$\frac{\partial (n_j \mu)}{\partial \beta_i} = \mu \left(\frac{\delta_{ij} - n_i n_j}{\beta} \right) + n_j \left(\frac{\delta_{i3} - \mu n_i}{\beta} \right)$$

dan la fórmula

$$\begin{aligned}
(m_i c)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j} &= n_i n_j \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} + \left[\frac{n_i (\delta_{j3} - n_j \mu) + n_j (\delta_{i3} - \mu n_i)}{\beta} \right] \frac{\partial^2 f}{\partial \beta \partial \mu} + \\
&+ \left[\frac{(\delta_{i3} - \mu n_i)(\delta_{j3} - \mu n_j)}{\beta^2} \right] \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} + \frac{(\delta_{ij} - n_i n_j)}{\beta} \frac{\partial f}{\partial \beta} - \\
&- \left[\frac{n_i (\delta_{j3} - \mu n_j) + n_j (\delta_{i3} - \mu n_i) + \mu (\delta_{ij} - n_i n_j)}{\beta^2} \right] \frac{\partial f}{\partial \mu}.
\end{aligned} \quad (a5)$$

Mediante las expresiones (a2) a la (a5) se pueden escribir las ecuaciones cinéticas como

$$\begin{aligned}
\beta \mu \frac{\partial f}{\partial z} + (\chi + \chi') f + (\phi_3 + \phi'_3) \left[\mu \frac{\partial f}{\partial \beta} + \frac{(1 - \mu^2)}{\beta} \frac{\partial f}{\partial \mu} \right] &= \eta + \\
+ \alpha_{\beta\beta} \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} + \alpha_{\beta\mu} \frac{\partial^2 f}{\partial \beta \partial \mu} + \alpha_{\mu\mu} \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} + \alpha_{\beta} \frac{\partial f}{\partial \beta} + \alpha_{\mu} \frac{\partial f}{\partial \mu}
\end{aligned} \quad (a6)$$

donde los símbolos α representan los resultados de las contracciones de índices

$$\begin{aligned}
\alpha_{\beta\beta} &= n_i \psi_{ij} n_j \\
\alpha_{\beta\mu} &= n_i \psi_{ij} \frac{(\delta_{j3} - n_j \mu)}{\beta} + \frac{(\delta_{i3} - \mu n_i)}{\beta} \psi_{ij} n_j \\
\alpha_{\mu\mu} &= \frac{(\delta_{i3} - \mu n_i)}{\beta} \psi_{ij} \frac{(\delta_{j3} - \mu n_j)}{\beta}
\end{aligned} \quad (a7)$$

$$\alpha_{\beta} = \frac{(\delta_{ij} - n_i n_j)}{\beta} \psi_{ij} = \frac{\text{traza } \psi - \alpha_{\beta\beta}}{\beta}$$

$$\alpha_{\mu} = - \left(\frac{\alpha_{\beta\mu} + \mu \alpha_{\beta}}{\beta} \right)$$

De acuerdo con lo antedicho respecto de la simetría respecto al eje z , todos los coeficientes en (a b) son independientes de φ aunque , en su cálculo deba utilizarse ese ángulo como se verá mas adelante

Si se descomponen todos los coeficientes y funciones de distribución en partes simétrica y antisimétrica respecto de ν , $(-1 \leq \nu \leq +1)$

$$f^s(\nu) = \frac{1}{2} [f(|\nu|) + f(-|\nu|)] \quad (28)$$

$$f^a(\nu) = \frac{1}{2} [f(|\nu|) - f(-|\nu|)]$$

se puede reducir el espacio de valores de ν al intervalo $[0, 1]$ y contando con esas definiciones , es

$$\begin{aligned} f(+\nu) &= f^s(\nu) + f^a(\nu) \\ f(-\nu) &= f^s(\nu) - f^a(\nu) \end{aligned} \quad (29)$$

La ecuación (a b) se puede descomponer en dos ecuaciones de paridad definida , por el artificio de sumar y restar las ecuaciones con $(+\nu)$ y con $(-\nu)$ y luego dividir por dos , con lo cual

$$\begin{aligned}\theta^a f^a + \theta^s f^s &= \eta^s + \mathcal{D}^a f^a + \mathcal{D}^s f^s \\ \beta \mu \frac{\partial f^s}{\partial z} + \theta^s f^a + \theta^a f^s &= \eta^a + \mathcal{D}^s f^a + \mathcal{D}^a f^s\end{aligned}\quad (a10)$$

donde son

$$\begin{aligned}\theta^s &= (\chi^s + \chi'^s) + (\phi_3^a + \phi_3'^a) \left[\mu \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{(1-\mu^2)}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \right] \\ \theta^a &= (\chi^a + \chi'^a) + (\phi_3^s + \phi_3'^s) \left[\mu \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{(1-\mu^2)}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \right] \\ \mathcal{D}^a &= \alpha_{\beta\beta}^a \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \alpha_{\beta\mu}^s \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \mu} + \alpha_{\mu\mu}^a \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} + \alpha_{\beta}^a \frac{\partial}{\partial \beta} + \alpha_{\mu}^s \frac{\partial}{\partial \mu} \\ \mathcal{D}^s &= \alpha_{\beta\beta}^s \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \alpha_{\beta\mu}^a \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \mu} + \alpha_{\mu\mu}^s \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} + \alpha_{\beta}^s \frac{\partial}{\partial \beta} + \alpha_{\mu}^a \frac{\partial}{\partial \mu}\end{aligned}\quad (a11)$$

En estas definiciones, por ser \vec{G} un vector independiente de μ , resulta $\phi_3^a = 0$ y pueden explicitarse las definiciones a partir de las expresiones (19 RC) y (21 RC).

$$\begin{aligned}\chi^s &= \int \left(\frac{W^+ + W^-}{2} \right) f_B dp_B^3 \\ \chi^a &= \int \left(\frac{W^+ - W^-}{2} \right) f_B dp_B^3\end{aligned}\quad (a12)$$

donde el suprasigno es el signo de ν_A .

Sin embargo, cuando se efectúa la integración sobre dp_B^3 , deben tenerse en cuenta las contribuciones con ambos signos de ν_B , ν_C y ν_D .

En una primera etapa estudiaremos las expresiones de χ^s , χ^a y m^s , m^a para analizar las ecuaciones (a10), reteniendo sólo los términos de colisiones correspondientes.

Las conclusiones que se obtengan resultarán válidas cuando se incluyan también los términos de Fokker-Planck ya que éstos pueden derivarse de los de Boltzmann.

Se adoptará la nomenclatura en la que los cuatro signos que se señalan como suprasignos de W son los que corresponden a ν_A, ν_B, ν_C y ν_D en ese orden. Cuando en lugar del signo aparezca un asterisco, se entenderá la suma de los términos con ambos signos en esa posición. Los suprasignos de las funciones de distribución corresponden al signo del ν correspondiente.

Entonces, con $0 \leq \nu \leq 1$, tenemos

$$\begin{aligned}
 \chi^S &= \int \left(\frac{W^{++++} + W^{-+++}}{2} \right) f_B^+ d\rho_B^3 + \int \left(\frac{W^{+-**} + W^{--**}}{2} \right) f_B^- d\rho_B^3 \\
 \chi^a &= \int \left(\frac{W^{++++} - W^{-+++}}{2} \right) f_B^+ d\rho_B^3 + \int \left(\frac{W^{+-**} - W^{--**}}{2} \right) f_B^- d\rho_B^3 \\
 \eta^S &= \int \left(\frac{W^{++++} + W^{-*++}}{2} \right) f_c^+ f_d^+ d\rho_B^3 + \int \left(\frac{W^{+*-+} + W^{-*-+}}{2} \right) f_c^- f_d^+ d\rho_B^3 + \\
 &\quad + \int \left(\frac{W^{+*+-} + W^{-*+-}}{2} \right) f_c^+ f_d^- d\rho_B^3 + \int \left(\frac{W^{+*--} + W^{-*--}}{2} \right) f_c^- f_d^- d\rho_B^3 \\
 \eta^a &= \int \left(\frac{W^{++++} - W^{-*++}}{2} \right) f_c^+ f_d^+ d\rho_B^3 + \int \left(\frac{W^{+*-+} - W^{-*-+}}{2} \right) f_c^- f_d^+ d\rho_B^3 + \\
 &\quad + \int \left(\frac{W^{+*+-} - W^{-*+-}}{2} \right) f_c^+ f_d^- d\rho_B^3 + \int \left(\frac{W^{+*--} - W^{-*--}}{2} \right) f_c^- f_d^- d\rho_B^3
 \end{aligned} \tag{a.13}$$

Por la simetría de los factores W respecto a la inversión de todos los ejes de coordenadas del impulso, que equivale a la inversión del tiempo en la mecánica de las colisiones, y por ser los restantes factores independientes de ϕ , resulta W simétrica respecto a la inversión de los signos de los cuatro ν . La inversión de todos los ejes en el espacio de impulsos corresponde a la inversión en los signos de todos los ν y la suma de π radianes a todos los ángulos.

Resulta entences , agrupando

$$\chi^s = \int (W^{++++} + W^{+-**}) f_B^s d\rho_B^3$$

$$\chi^a = \int (W^{+-**} - W^{+-**}) f_B^a d\rho_B^3$$

$$\begin{aligned} \eta^s = & \int (W^{****} + W^{**--}) (f_c^s f_d^s + f_c^a f_d^a) d\rho_B^3 + \\ & + \int (W^{**+-} + W^{**+-}) (f_c^s f_d^s - f_c^a f_d^a) d\rho_B^3 \end{aligned} \quad (214)$$

$$\begin{aligned} \eta^a = & \int (W^{****} - W^{**--}) (f_c^s f_d^a + f_c^a f_d^s) d\rho_B^3 + \\ & + \int (W^{**+-} - W^{**+-}) (f_c^s f_d^a - f_c^a f_d^s) d\rho_B^3 \end{aligned}$$

Estas expresiones son generales y están vinculadas al carácter bilineal y a las simetrías del término de colisiones, y a partir de ellas se ve que en la expresión (211) del operador θ^a sólo intervienen las f_B^a y en la del operador θ^s sólo las f_B^s .

Es por éste que si se supone que las f^a de las partículas son de primer orden respecto de las f^s correspondientes, resulta de las ecuaciones (210) que a orden cero

$$\theta^s f^s = \eta^s + \mathcal{D}^s f^s,$$

y a primer orden

(215)

$$\beta \mu \frac{\partial f^s}{\partial z} + \theta^s f^a + \theta^a f^s = \eta^a + \mathcal{D}^s f^a + \mathcal{D}^a f^s$$

Este es válido siempre que $\theta^a f^a$ y $\mathcal{D}^a f^a$ sean despreciables, estos son términos de segundo orden en general, aunque pueden no ser pequeños

si el flujo de radiación fuera suficientemente grande .

En tal caso podría incluso alterarse la primera de las ecuaciones (a 15) pero aquí no consideraré ese caso . Supondré válidas las condiciones para la situación antes llamada ∇ ETL , en la cual las funciones de distribución de las partículas son a orden cero las de Maxwell (F) , que son simétricas , y se cumplen las ecuaciones de balance estadístico, lo cual equivale a satisfacer la primera de las ecuaciones (a 15) con $f^s = F$ a orden cero .

A partir de la componente simétrica a orden cero (F) de la función de distribución , se adicionan las perturbaciones simétrica y antisimétrica que se obtienen resolviendo las ecuaciones (a 15) correspondientes .

Este planteo resulta en ecuaciones similares a las del desarrollo perturbativo del método CHE , sin embargo , en el caso presente , no se ha hecho desarrollo perturbativo alrededor de una situación de ETL en serie de potencias , sino que solamente se supone que las funciones de distribución de las partículas difieren poco de las funciones simétricas F , que cumplen la ecuación

$$\mathcal{O}^s F = n_F^s + \mathcal{D}_F^s F . \quad (a 16)$$

En estas condiciones , pueden obtenerse las correcciones δf^a y δf^s usando el método de Newton-Raphson generalizando (NR) . O sea se toma como punto de partida $f_0^s = F$ y $f_0^a = 0$ y se itera el procedimiento de obtener las correcciones $\delta f_i^a = f_{i+1}^a - f_i^a$, $\delta f_i^s = f_{i+1}^s - f_i^s$ resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\mathcal{E}_i^s = \mathcal{O}_i^a f_i^a + \mathcal{O}_i^s f_i^s - n_i^s - \mathcal{D}_i^a f_i^a - \mathcal{D}_i^s f_i^s$$

$$\mathcal{E}_i^a = \beta\mu \frac{\partial f_i^s}{\partial y} + \mathcal{O}_i^s f_i^a + \mathcal{O}_i^a f_i^s - n_i^a - \mathcal{D}_i^s f_i^a - \mathcal{D}_i^a f_i^s$$

$$\begin{aligned}
& \epsilon_i^s + \theta_i^a \delta f_i^a + \delta f_i^a \frac{\partial \theta_i^a}{\partial f_i^a} f_i^a + \delta f_i^s \frac{\partial \theta_i^a}{\partial f_i^s} f_i^s + \theta_i^s \delta f_i^s + \delta f_i^s \frac{\partial \theta_i^s}{\partial f_i^s} f_i^s + \\
& + \delta f_i^a \frac{\partial \theta_i^s}{\partial f_i^a} f_i^s = \delta f_i^a \frac{\partial \eta_i^s}{\partial f_i^a} + \delta f_i^s \frac{\partial \eta_i^s}{\partial f_i^s} + \theta_i^a \delta f_i^a + \delta f_i^a \frac{\partial \theta_i^a}{\partial f_i^a} f_i^a + \\
& + \delta f_i^s \frac{\partial \theta_i^a}{\partial f_i^s} f_i^a + \theta_i^s \delta f_i^s + \delta f_i^a \frac{\partial \theta_i^s}{\partial f_i^a} f_i^s + \delta f_i^s \frac{\partial \theta_i^s}{\partial f_i^s} f_i^s \quad (a17) \\
& \epsilon_i^a + \theta_i^s \delta f_i^s + \delta f_i^s \frac{\partial \theta_i^s}{\partial f_i^s} f_i^s + \delta f_i^a \frac{\partial \theta_i^s}{\partial f_i^a} f_i^a + \theta_i^a \delta f_i^a + \delta f_i^a \frac{\partial \theta_i^a}{\partial f_i^a} f_i^a + \\
& + \delta f_i^s \frac{\partial \theta_i^a}{\partial f_i^s} f_i^s = \delta f_i^a \frac{\partial \eta_i^a}{\partial f_i^a} + \delta f_i^s \frac{\partial \eta_i^a}{\partial f_i^s} + \theta_i^s \delta f_i^s + \delta f_i^s \frac{\partial \theta_i^s}{\partial f_i^s} f_i^s + \\
& + \delta f_i^a \frac{\partial \theta_i^s}{\partial f_i^a} f_i^a + \theta_i^a \delta f_i^a + \delta f_i^a \frac{\partial \theta_i^a}{\partial f_i^a} f_i^a + \delta f_i^s \frac{\partial \theta_i^a}{\partial f_i^s} f_i^s
\end{aligned}$$

las derivadas en estas expresiones se toman para los valores de f_i^s, f_i^a .

Este método, aunque requiere mucho cálculo, no presenta demasiada complejidad para una moderna "supercomputadora", con la cual podría resolverse el problema de obtener f^s y f^a aún en casos en que las correcciones δf puedan no ser tan pequeñas y de ésta manera resolver coherentemente el problema de limitación de flujos. Queda abierto el problema de si con este método es posible o no calcular las funciones de distribución en casos en que las distribuciones se apartan fuertemente de la inicial y no puede preverse a priori si el método de Newton-Raphson converge.

En este método las f_i^s, f_i^a no son términos de una suma, sino que representan sucesivas aproximaciones a los valores exactos.

Por la forma del error ϵ_{i0}^s , se ve que éste es siempre nulo al partir de los valores de f_0^s, f_0^a definidos, y el error de la parte antisimétrica resulta

$$\epsilon_{i0}^a = \beta \mu \frac{\partial F}{\partial z} \quad (a18)$$

De aquí se ve que en la primer iteración, el procedimiento que presente lleva a las fórmulas mas compactas

$$\partial_0^s \delta f_0^s + \delta f_0^s \frac{\partial \partial^s}{\partial f^s} F = \delta f_0^s \frac{\partial \eta^s}{\partial f^s} + \delta f_0^s \frac{\partial \partial^s}{\partial f^s} F + \partial_0^s \delta f_0^s \quad (a19)$$

$$\beta \mu \frac{\partial F}{\partial z} + \partial_0^s \delta f_0^a \frac{\partial \partial^a}{\partial f^a} F = \delta f_0^a \frac{\partial \eta^a}{\partial f^a} + \partial_0^s \delta f_0^a + \delta f_0^a \frac{\partial \partial^a}{\partial f^a} F$$

A partir de éstas últimas ecuaciones, puede deducirse que por ser la primera de ellas homogénea, es

$$\delta f_0^s = 0 \quad (a20)$$

y de la segunda podría obtenerse δf_0^a , que resultaría proporcional a $\frac{\partial F}{\partial z}$, que es el único término independiente. Si los valores de esas derivadas son suficientemente pequeños, resulta $\delta f_0^a \ll F$ y entonces puede suponerse que $f_1^s = F$; $f_1^a = \delta f_0^a$ son una buena aproximación para los valores exactos de f^s, f^a .

Un criterio mas objetivo, podría obtenerse de considerar la segunda iteración en el método NR y establecer una ceta para los errores $\epsilon_1^s, \epsilon_1^a$. En el presente trabajo no seguiré este criterio más correcto, por no contar con computadora apta para ello, y en cambio, usaré el criterio mas cualitativo de comparar δf_0^a con F .

La segunda de las ecuaciones (a19) puede transformarse teniendo en cuenta la definición de F dada en (g.5)

$$\frac{\partial F}{\partial z} = F \left[\frac{d \ln n}{dz} + \left(\frac{m w^2}{2 b T} - \frac{3}{2} \right) \frac{d \ln T}{dz} + \frac{m w_z}{b T} \frac{d u_z}{dz} \right] \quad (a21)$$

$$\vec{w} = (\vec{v} - \vec{u})$$

como $u_3 = 0$ obtenemos

$$-F\beta\mu\left[\frac{d\ln n}{dz} + \left(\chi^2 - \frac{3}{2}\right)\frac{d\ln T}{dz} + \frac{mc^2}{kT}\beta\mu\frac{d\beta_0}{dz}\right] = (\theta^s - \mathcal{D}^s)f^a +$$

$$+ f^a\left(\frac{\partial\theta^a}{\partial f^a}F - \frac{\partial\eta^a}{\partial f^a} - \frac{\partial\mathcal{D}^a}{\partial f^a}F\right) \quad (a22)$$

siendo

$$\chi^2 = \frac{m\omega^2}{2kT}, \quad \beta_0 = \frac{1}{c}u_3$$

En el curso del trabajo se adoptará $\beta_0 = 0$, o sea que se definirán todos los coeficientes en el sistema de referencia en el cual la velocidad del fluido es nula.

En las ecuaciones anteriores, existen valores de η^a y ψ^a que son debidos a las interacciones con fotones, ellos también se encuentran expresados como $\int f_v^a \frac{\partial \eta^a}{\partial f_v^a}$ y $\int f_v^a \frac{\partial \psi^a}{\partial f_v^a}$ y representan términos independientes.

Y quedan aún por definir las fuerzas termodinámicas que produciría, sobre las partículas, la radiación; para ello, deberían especificarse los valores de $f_v^a \equiv f_v^a$ a todas las frecuencias. Por razones obvias, he tomado sólo dos variables, que están conectadas con las variables W y T_R antes mencionadas.

Se tratarán aquí los casos de LOS y el caso de campo de radiación isótropo a orden cero, para los cuales es coherente la suposición de $p \ll ETL$ y de que las f_v^a son pequeñas.

En el caso LOS, y despreciando el efecto de la velocidad en el corrimiento Doppler (cosa que es posible por tenerse en cuenta sólo el continuo de Lyman) se tomó para los fotones

$$f_{v_0}^a = 0$$

$$f_{v_0}^s = F_v = \frac{W}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

(a23)

siendo

$$\frac{\partial F_v}{\partial z} = \frac{\partial F_v}{\partial W} \frac{dW}{dz} + \frac{\partial F_v}{\partial T_R} \frac{dT_R}{dz} \quad ,$$

• sea

$$\frac{\partial F_v}{\partial z} = F_v \left(\frac{d \ln W}{dz} + \frac{e^{x_v}}{e^{x_v} - 1} x_v \frac{d \ln T_R}{dz} \right)$$

con

$$x_v = \frac{h \nu}{k T}$$

siendo las fuerzas termodinámicas $\frac{d \ln W}{dz}$ y $\frac{d \ln T_R}{dz}$.

Este planteo es especialmente apropiado para el caso LOS, pero en cualquier caso, se puede ver que usando la formulación de Feutrier

$$j_v = \frac{1}{2} [I_v(+\mu) + I_v(-\mu)]$$

$$L_v = \frac{1}{2} [I_v(+\mu) - I_v(-\mu)]$$

(a 24)

las ecuaciones de transporte radiativo se pueden escribir

$$\mu \frac{d j_v}{d z_v} = j_v - S_v^s \implies \mu \frac{\partial f_v^s}{\partial z} = n_v^s - \chi_v^s f_v^s - \chi_v^a f_v^a$$

(a 25)

$$\mu \frac{d j_v}{d z_v} = L_v - S_v^a \implies \mu \frac{\partial f_v^a}{\partial z} = n_v^a - \chi_v^s f_v^a - \chi_v^a f_v^s$$

De aquí se ve que en el caso β -LTE, se puede establecer una equivalencia entre las variables que propongo y las f_v^a que, por suponer pequeñas, denominamos como δf_v^a .

La segunda de las ecuaciones (a 25) resulta

$$\delta f_v^a = -\frac{\mu}{\chi_v^s} \frac{df_v^s}{dz} + \frac{n_v^a}{\chi_v^s} - \frac{\chi_v^a}{\chi_v^s} f_v^s \quad (a 26)$$

En la primera iteración del método de Newton-Raphson, es

$n_{v_0}^a = \chi_{v_0}^a = 0$ y por lo tanto, la equivalencia se puede expresar como

$$\delta f_{v_0}^a = -\frac{\mu}{\chi_v^s} \frac{df_v^s}{dz} = -\frac{\mu}{\chi_v^s} \frac{\partial F_v}{\partial z} \quad (a 27)$$

y resultará

$$L_v = -\frac{\mu}{\chi_v^s} \frac{d(WB_v(T_R))}{dz} = -\mu \frac{d(WB_v(T_R))}{d\tau_v} \quad (a 28)$$

La otra de las ecuaciones (a 25), queda

$$\mu \frac{\partial(\delta f_{v_0}^a)}{\partial z} = n_{v_0}^s - \chi_{v_0}^s F \quad (a 29)$$

que es la ecuación que debería usarse si en el procedimiento iterativo se corrigiera también el campo de radiación. Claro está, la ecuación en general debe resolverse para toda una región con las condiciones de contorno apropiadas y tiende a la ecuación de difusión en el caso LOS, en que $\chi_v^s F \rightarrow n_v^s$.

La ecuación (a 29) no está directamente relacionada con nuestro problema, sí lo está con las derivadas segundas de W , T_R , cuyos valores se supone que la satisfacen.

Si se consideran variables en el tiempo los parámetros que caracterizan la distribución simétrica de partida F , y además se utiliza un sistema con $\beta_0 \neq 0$, deben reemplazarse las derivadas totales por derivadas parciales

respecto de z . Y además, en la primera de las ecuaciones (a-10) debe sumarse al miembro izquierdo el término

$$\frac{1}{c} \frac{df^s}{dt} = \frac{1}{c} \frac{\partial f^s}{\partial t} + \beta_0 \frac{\partial f^s}{\partial z}$$

Esto no altera los razonamientos expuestos, y su único efecto importante es (en la aproximación presente) modificar la ecuación que debe cumplir F , que pasa a ser

$$\frac{1}{c} \frac{\partial F}{\partial t} + \beta_0 \frac{\partial F}{\partial z} + \mathcal{O}_F^s F = \eta_F^s + \mathcal{D}_F^s F$$

De ésta resulta que las ecuaciones de equilibrio estadístico deben llevarse para obtener las densidades n_α a la forma

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \beta_0 c \frac{\partial n_\alpha}{\partial z} = R_{\alpha\downarrow} - R_{\alpha\uparrow}$$

Esta ecuación es similar a la hidrodinámica correspondiente excepto por la ausencia del término difusivo, que lógicamente sólo se conocería luego de la primera iteración.

3.2 Términos de colisiones de Boltzmann

Como se expuso antes, para calcular estos términos de colisiones es necesario conocer la sección eficaz diferencial de la colisión, y debe efectuarse una doble integración, sobre $d\mathbf{p}_b^3$ y sobre $(d\mathbf{p}_c d\mathbf{q}_c)$.

Las colisiones relevantes en nuestro problema son las electrón-átomo, protón-átomo y átomo-átomo, a lo que los expertos en colisiones llaman bajas energías pues nos interesan sólo energías en el orden de la energía térmica. Las colisiones entre partículas cargadas, se tratarán sólo en la forma de Focke-Planck,

aunque el método que utilizo permitiría también incluir las colisiones entre partículas cargadas con grandes ángulos de deflexión, usando la sección eficaz de Rutherford. Esto último no pudo hacerse porque incrementaría demasiado el tiempo de cálculo y haría imposible el trabajo en las computadoras disponibles, de todas maneras, de acuerdo a la bibliografía se supone que la contribución correspondiente no sería importante.

3.2.1 Colisiones electrón-átomo

Las colisiones electrón-átomo fueron estudiadas por Temkin y Lakin (1961) que utilizaron la descomposición en ondas parciales. Trabajos posteriores mejoraron éstos resultados, pero de acuerdo a Khon, Falcon y Gosh (1982 y otro) las diferencias serían del orden del 10 %, y no fue posible conseguir datos completos.

No es objeto de este trabajo el análisis de este método, y mencionaré sólo algunos puntos relevantes aquí. En el método, la función de onda del estado final del electrón queda expandida en una serie de armónicos esféricos con coeficientes de la forma $e^{i\delta_l}$, donde δ_l es el llamado "desplazamiento de fase" (phase shift) del polinomio l .

De acuerdo a la nomenclatura usual, el término asociado con el polinomio $l=0$ corresponde a la onda "S" y es isótropo (o sea que la sección eficaz diferencial es independiente del ángulo) y el de $l=1$ corresponde a la onda "p" y es proporcional a ν (siendo $\nu = \cos \epsilon_{lab}$, con ϵ_{lab} el ángulo de deflexión del electrón en el sistema de laboratorio).

De acuerdo al trabajo de Tamkin y Lakin, cuyos resultados se exponen en el libro de Bates (), para las energías que nos interesan sólo son importantes las ondas S y p y se da en ese libro, una tabla para δ_0 y δ_1 en función de (B/a_0) que equivale a la energía.

Como se ilustra en el libro de Schiff (1955), siendo a_0 el radio de la primera órbita de Bohor, si es E_0 la energía de esa órbita,

$$a_0 = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m_r E_0}}, \quad b = \sqrt{\frac{2m_r E}{\hbar^2}}$$

con $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, E la energía del electrón y m_r la masa reducida.

Con éstas fórmulas , resulta

$$(\beta a_0) = \frac{\beta}{\beta_B} \quad \text{siendo} \quad \beta_B = \frac{v_B}{c} = 7.297 \times 10^{-3}$$

con v_B la velocidad del electrón en la primera órbita de Bohr. Y por otro lado , según ese libro

$$d\sigma = \frac{1}{\beta^2} \left(\sin^2 \delta_0 + 6 \sin \delta_0 \sin \delta_1 \cos(\delta_1 - \delta_0) \mu + 9 \sin^2 \delta_1 \mu^2 \right) d\mu d\varphi$$

Esta expresión se puso en la forma

$$d\sigma = a (1 + b\mu + c\mu^2) d\mu d\varphi$$

En la tabla I se muestran los valores de a, b, y c como función de (β/β_B) que resultan de los valores del libro de Bates.

Para simplificar el cálculo , en lugar de interpolar en esa tabla busqué una función analítica que aproxime esos puntos dentro de una precisión razonable y con un comportamiento adecuado para $\beta \rightarrow 0$.

Esto se logró con las fórmulas

$$a = a_0^2 \cdot 18 e^{-3(\frac{\beta}{\beta_B})}$$

$$b = \sin \left[-1.67 \pi \left(\frac{\beta}{\beta_B} \right) \right] + 0.03 \left(\frac{\beta}{\beta_0} \right)^2$$

$$c = 0.014$$

que son las utilizadas en este trabajo.

Debo mencionar que se consideran energías de los electrones incidentes bastante inferiores a la del primer nivel excitado.

3.2.2 Colisiones átomo-átomo

Las colisiones átomo-átomo , son en algunos aspectos mas complicadas que las precedentes ya que, a las energías involucradas , los átomos formarían una molécula transitoriamente. A causa de que la energía del proyectil es comparable con las de excitación de esa molécula , la situación se torna complicada

y en el método de ondas parciales se hace necesario considerar gran cantidad de esas ondas (valores de ℓ).

La gran cantidad de ondas parciales produce dos graves inconvenientes, por una parte, la sección eficaz diferencial tiene violentas oscilaciones con μ , y debido a la gran cantidad de valores (30 o mas), nunca se han publicado listados de los desplazamientos de fase en función de la energía.

Las colisiones elásticas entre átomos de hidrógeno son consideradas en el libro de Massey (1971) en el cual se presentan expresiones para los dos posibles potenciales de interacción dependiendo de si los "spins" de los electrones atómicos son paralelos o antiparalelos. La primera corresponde al caso "ungerade" (μ) y es repulsiva, excepto a muy grandes distancias a las cuales se torna atractiva del tipo Van der Waals. En el segundo caso, llamado "gerade" (g), es fuertemente atractiva a ciertas distancias para luego volverse repulsiva.

En los gráficos se ve que para distancias menores que $5 a_0$, el potencial μ crece monótonamente con la inversa de la distancia, mientras que el g tiene un pronunciado mínimo ("pozo de potencial") para aproximadamente $1.2 a_0$.

En el mencionado libro se ilustran secciones eficaces totales, en función de la energía, correspondientes a ambos tipos de interacción. Como se ve, la correspondiente al potencial μ (correspondiente al estado triplete de la molécula H_2) posee un pico a bajísima energía, y luego es prácticamente constante, en cambio la del potencial g (correspondiente al estado singlete) presenta en todo el range de energías graficado, violentas oscilaciones.

Los picos que aparecen en los gráficos mencionados son debidos a las resonancias con los niveles ligados de la molécula H_2 y tienen relación con las oscilaciones en la sección eficaz diferencial.

Por último, en el gráfico mencionado se muestra la curva promedio, donde éste promedio es pesado de acuerdo a la probabilidad de ambos casos, así

$$\sigma = \frac{1}{4} \sigma_g + \frac{3}{4} \sigma_\mu$$
 El resultado exhibe menos fluctuaciones que el caso g y se le muestra una importante resonancia a $(\beta/\beta_0) \approx 0.5$.

En ese libro también se muestra un gráfico de la sección eficaz diferencial para los tres casos, μ , g y promedio, pero solamente para energía

cinética relativa. $E = 0.004 \text{ eV}$.

La falta de datos más completos me obligó a tomar valores de la sección eficaz diferencial no muy precisos, por lo que sería recomendable que alguien calculara la correspondiente sección eficaz con mayor detalle. Se espera sin embargo que los coeficientes de transporte, por no ser demasiado sensibles a la variación angular de la sección eficaz, no deban corregirse demasiado.

En éste trabajo, he tomado para la sección eficaz diferencial una expresión similar a la usada en el caso electrón-átomo con

$$a = 0.65 a_0^2$$

$$b = 25$$

$$c = 35$$

Estos valores corresponden a aproximaciones alisadas de los gráficos del libro de Massey y llevan a una sección eficaz total de

$$\sigma_{tot} = 4\pi (17 a_0^2) \approx 60 \text{ Å}^2$$

Esta sección eficaz contrasta con los valores usados por Devoto (1968) que varían entre 5 y 13 Å² según la velocidad. Los valores utilizados en este trabajo, provienen de cálculos con expresiones analíticas muy simplificadas (de Morse para el potencial q y de Coulomb apantallado para el potencial u) que ajustarían los potenciales calculados por Kolos y Wolniewicz (1965).

En cambio, los valores de secciones eficaces que se muestran en el libro de Massey provienen de cálculos detallados de Fox y Gal (1967) usando los potenciales de interacción de Dalgarno y Lynn (1956).

Ambos cálculos de los potenciales de interacción difieren muy poco y no justifican una diferencia muy grande en las secciones eficaces, ésta diferencia debe atribuirse a la diferente manera en que se calcularon las secciones eficaces, para un potencial de interacción dado.

En la tabla II se ilustran los datos que se usaron para el caso átomo-átomo.

3.2.3 Colisiones protón-átomo

El problema es mas grave aún para las colisiones entre protones y átomos. En éste caso la mayor contribución a la sección eficaz es la debida al proceso de intercambio de carga aunque también tienen importancia las llamadas colisiones elásticas por los especialistas en colisiones. En mi trabajo ambos procesos son indistinguibles y se incluyen en lo que llamo colisiones elásticas.

La sección eficaz de intercambio de carga, presenta un marcado máximo para energía cero y $\mu=1$; para la sección eficaz diferencial, cabe esperar también la aparición de resonancias de las distintas ondas que hacen que aparezcan grandes fluctuaciones con la energía y el ángulo.

Debido a la carencia de datos, y a que se puede suponer que éstas colisiones, no determinan fundamentalmente los coeficientes de transporte he tomado datos alisados para colisiones $He^+ - H$ proporcionados por Opradelle (1984) y escalados de acuerdo a las masas involucradas. Se tomó

$$d\sigma = a_0^2 \left[0.25 e^{-0.056E} (1+20\mu^2) + 0.033 e^{-140E} \times 2 \times 10^4 e^{23(\mu-1)} \right] d\mu d\varphi$$

siendo E la energía relativa en electrón-volt (eV).

Esta fórmula ajusta los datos de la Tabla III, suponiendo que el gran máximo a energía cero está relacionado con el máximo a $\mu = 1$.

De acuerdo a ella, para energías de $1 eV$, la sección eficaz total es de aproximadamente 50 \AA^2 , valor que es menor que el correspondiente dado por Devoto (1968), quien, en base a los datos de Dalgarno (1958) usa la expresión

$$\sigma_{tot} \approx (25.54 - 1.09 \ln v)^2$$

siendo v la velocidad relativa en cm s^{-1} y σ dado en \AA^2 .

Según pruebas efectuadas, las diferencias en los coeficientes no resultarían demasiado importantes, aunque sería interesante calcular las secciones eficaces diferenciales con las técnicas y computadoras de que se dispone actualmente, para luego poder precisar mejor los coeficientes de transporte en algunos casos de ionización media.

3.2.4 Conversión de secciones eficaces

Las secciones eficaces que se han presentado, están expresadas en el sistema de laboratorio. Para utilizarlas en el método que propongo, deben transformarse al sistema en el cual las dos partículas que colisionan se mueven con velocidades \vec{v}_A y \vec{v}_B . Para ésta transformación, es necesario multiplicar por el Jacobiano correspondiente.

$$\sigma' = \sigma \frac{\partial(\mu, \varphi)}{\partial(\mu_c, \varphi_c)} = \sigma_{lab} \frac{\sin \theta}{\sin \theta_c} \frac{\partial(\theta, \varphi)}{\partial(\theta_c, \varphi_c)} \quad (b1)$$

siendo los valores sin subíndice los del sistema de laboratorio para la partícula C.

Esta transformación no se pudo encontrar en libros de manera que debió ser desarrollada de la siguiente manera.

El sistema de laboratorio, se obtiene a partir del sistema del fluido (en el espacio de velocidades) cambiando el origen a \vec{v}_B (de ésta manera, la partícula B queda en reposo), y luego mediante dos rotaciones, una alrededor del eje z en φ_s (que anularía el ángulo φ de $\vec{v}_{AB} \equiv (\vec{v}_A - \vec{v}_B)$) y otra alrededor del eje x en θ_s (que anularía el ángulo θ de \vec{v}_{AB}).

Luego, aplicando el procedimiento inverso

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{R} \cdot (v_{AB} \vec{m}_3) \quad (b2)$$

donde \vec{R} es la matriz correspondiente a las rotaciones mencionadas que se puede expresar en la forma

$$R = \begin{vmatrix} \cos \varphi_s & \sin \varphi_s & 0 \\ -\sin \varphi_s & \cos \varphi_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_s & \sin \theta_s \\ 0 & -\sin \theta_s & \cos \theta_s \end{vmatrix} \quad (b3)$$

De aquí resulta, siguiendo la transformación inversa,

$$\vec{v}_{CB} = \vec{v}_C - \vec{v}_B = \vec{R} \cdot \vec{v} \quad (b4)$$

y como \vec{R} es una matriz unitaria, vale que

$$v_{CB}^2 = v^2 = v_C^2 + v_B^2 - 2 v_C v_B \mu_{BC} \quad (b5)$$

siendo μ_{BC} el coseno del ángulo entre \vec{v}_B y \vec{v}_C , que es

$$\mu_{BC} = \mu_B \mu_C + \sin \theta_B \sin \theta_C \cos (\varphi_C - \varphi_B). \quad (b6)$$

Por otra parte se pueden despejar los ángulos de \vec{v}_{CB} , que se indicarán con el índice 0

$$\mu_0 = \frac{v_C \mu_C - v_B \mu_B}{v} = \frac{v_{Cx} - v_{Bx}}{v} \quad (b7)$$

$$\tan \varphi_0 = \frac{v_C \sin \varphi_C \sin \theta_C - v_B \sin \varphi_B \sin \theta_B}{v_C \cos \varphi_C \sin \theta_C - v_B \cos \varphi_B \sin \theta_B} = \frac{v_{Cy} - v_{By}}{v_{Cx} - v_{Bx}}.$$

Por ser el Jacobiano de las rotaciones igual a 1, es

$$\frac{\lambda(\theta, \varphi)}{\lambda(\theta_c, \varphi_c)} = \frac{\lambda(\theta, \varphi)}{\lambda(\theta_0, \varphi_0)} \frac{\lambda(\theta_0, \varphi_0)}{\lambda(\theta_c, \varphi_c)} = \frac{\lambda(\theta_0, \varphi_0)}{\lambda(\theta_c, \varphi_c)} \quad (68)$$

Luego, basta con tomar el determinante de las derivadas correspondientes. En todo este proceso, debe recordarse, que las variables independientes son θ_c y φ_c , pero además, es v_c constante y fijada por las ecuaciones de conservación de impulso y energía, por lo tanto en la expresión de v , ésta será función de θ_c y φ_c . Es decir

$$d\mu_0 = \frac{dv_{c3}}{v} - \mu_0 \frac{dv}{v} \quad (69)$$

y

$$dv = - \frac{v_c v_B}{v} d\mu_{BC}$$

de lo cual

$$v^3 d\mu_0 = v^2 dv_{c3} + v_c v_B (v_{c3} - v_{B3}) d\mu_{BC} \quad (610).$$

Por otra parte,

$$\frac{d\varphi_0}{\cos^2 \varphi_0} = \frac{dv_{cx}}{(v_{cy} - v_{By})} - \frac{\tan \varphi_0}{(v_{cy} - v_{By})} dv_{cy} \quad (611)$$

siendo

$$\cos \varphi_0 = \frac{v_{c3} - v_{B3}}{v \sin \theta_0}$$

Luego queda

$$v^2 \sin^2 \theta_0 d\varphi_0 = (\vec{v}_{C3} - \vec{v}_{B3}) d\vec{v}_{Cx} - (\vec{v}_{Cx} - \vec{v}_{Bx}) d\vec{v}_{Cy} \quad (b12).$$

Esas dos expresiones que dan $d\varphi_0$ y $d\theta_0$, se pueden llevar a

$$v^2 \sin \theta_0 d\theta_0 = v d\vec{v}_3 + \vec{v}_C \vec{v}_B \mu_0 d\varphi_{BC} \quad (b13)$$

$$v \sin \theta_0 d\varphi_0 = \cos \varphi_0 d\vec{v}_{Cx} - \sin \varphi_0 d\vec{v}_{Cy}$$

siendo

$$d\varphi_{BC} = \left[-\mu_B \mu_C \tan \theta_C + \mu_B \mu_C \tan \theta_B \cos(\varphi_C - \varphi_B) \right] d\theta_C - \\ - \mu_B \mu_C \tan \theta_C \tan \theta_B \sin(\varphi_C - \varphi_B) d\varphi_C \quad (b14)$$

Tras una tediosa álgebra, se obtienen las expresiones

$$v^3 \sin \theta_0 d\theta_0 = \left[\frac{(\vec{v}_C \cdot \vec{v}_B - v_{C3} v_{B3})(\vec{v}_{C3} - \vec{v}_{B3})}{\tan \theta_C} - \tan \theta_C v_{C3} (v^2 + v_{B3}(\vec{v}_{C3} - \vec{v}_{B3})) \right] d\theta_C + \\ + v(\vec{v}_B \times \vec{v}_C)_3 d\varphi_C \quad (b15)$$

$$v^2 \sin^2 \theta_0 d\varphi_0 = \frac{(\vec{v}_B \times \vec{v}_C)_3}{\tan \theta_C} d\theta_C + \left[\vec{v}_C \cdot (\vec{v}_C - \vec{v}_B) - v_{C3}(\vec{v}_{C3} - \vec{v}_{B3}) \right] d\varphi_C.$$

Como control, puede compararse el resultado de aplicar éstas fórmulas al caso en que se trata del cambio al sistema de coordenadas centro de masa, si $v_{Bx} = v_{By} = 0$

es

$$d\varphi_0 = d\varphi_C$$

$$d\theta_0 = \frac{-d\theta_C}{1 - \frac{\vec{v}_B \cdot (\vec{v}_C - \vec{v}_B)}{\vec{v}_C \cdot (\vec{v}_C - \vec{v}_B)}} = -\left(\frac{\vec{v}_C \cdot \vec{v}}{v^2} \right) d\theta_C \quad (b16)$$

En el sistema centro de masa, \vec{v}_B tiene sólo componente según z y queda

$$d\theta_0 = - \left(\frac{v_c^2 - v_{c3} v_{B3}}{v^2} \right) d\theta_c \quad (b17)$$

resultando

$$\sigma = \left(\frac{v}{v_c} \right)^3 \frac{\sigma_c}{1 - \frac{v_{c3} v_{B3}}{v_c^2}} \quad (b18)$$

siendo $\mu = -\frac{v_{B3}}{v_A} = \frac{m_A}{m_B}$ y $v_A = v_c$ en este sistema,

$$\sigma = \frac{(1 + \mu^2 + 2\mu v_c)^{3/2}}{1 + \mu v_c} \sigma_c \quad (b19)$$

que coincide con la fórmula de Schiff (1955).

Usando las expresiones anteriores para los diferenciales

$$\frac{\partial(\theta, \varphi)}{\partial(\theta_c, \varphi_c)} v^4 \sin^3 \theta_0 \frac{1}{\sin \theta_c} = (v_c^2 \sin^2 \theta_c - U_{BC}) \left[U_{BC} \mu_0 - \frac{1}{2} v_c^2 v_{c3} (v + v_{B3} \mu_0) \right] + (\vec{v}_B \times \vec{v}_c)_z^2 \quad (b20)$$

siendo

$$U_{BC} = (v_c v_B \mu_{BC} - v_{c3} v_{B3})$$

y

$$\mu_0 = \frac{v_{c3} - v_{B3}}{v}$$

resulta finalmente

$$\sigma_c = \sigma \left(\frac{\sin \theta}{\sin \theta_c} \right) \frac{(\bar{v}_c^2 (1 - \mu_c^2) - U_{BC}) [U_{BC} \mu_0 - v_c \mu_c \tan^2 \theta_c (\bar{v} + \bar{v}_B \mu_B \mu_0)] + (\bar{v}_B \times \bar{v}_c)_3^2}{v^4 \tan \theta_c \sin^2 \theta_0} \quad (b21)$$

Como se ve , esta fórmula es bastante complicada pero no difícil de evaluar , fué probada numéricamente , y además en el caso del sistema centro de masa lleva a las expresiones conocidas.

3.2.5 Velocidad de la partícula emergente

Otro cálculo necesario para evaluar los términos de colisiones de Boltzmann es la velocidad de la partícula C emergente . Con ésta , pueden calcularse las tres coordenadas de \vec{p}_c y entonces las de \vec{p}_D por la fórmula de conservación del impulso

$$\vec{p}_D = \vec{p}_A + \vec{p}_B - \vec{p}_c$$

Para calcular la velocidad de la partícula C , se plantea la ecuación de energía

$$\varepsilon_A + \varepsilon_B + m_A v_A^2 + m_B v_B^2 = m_C v_C^2 + m_D v_D^2 + \varepsilon_c + \varepsilon_D$$

que, en el caso elástico , se reduce a

$$r v_D^2 = (v_A^2 - v_c^2) + r v_B^2$$

siendo

$$r = \frac{m_B}{m_A}$$

Además, la suma de los cuadrados de las componentes de \vec{p}_D , es

$$r^2 v_D^2 = |\vec{v}_A + r \vec{v}_B|^2 + v_c^2 - 2 \vec{v}_c \cdot (\vec{v}_A + r \vec{v}_B)$$

De las dos ecuaciones planteadas , puede eliminarse v_D^2 y resulta la fórmula para v_c

$$v_c = v_0 \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{(1-r) \tau_A^2 + 2r \tau_A \tau_B \nu_{AB}}{(1+r) \tau_0^2}} \right)$$

con

$$v_0 = \frac{\tau_A \nu_{AC} + r \tau_B \nu_{AC}}{1+r}$$

siendo

$$\nu_{AB} = \frac{(\vec{\tau}_A \cdot \vec{\tau}_B)}{\tau_A \tau_B}, \text{ etc}$$

Esta fórmula proporciona en general dos resultados ; si uno de ellos resulta negativo se descarta , pues ya fue considerada en otro par de valores de θ_c , φ_c .

3.2.6 Dispersión elástica de fotones

En el caso en que alguna de las partículas que intervienen en la colisión es un fotón , el sistema de laboratorio es aquel en que la otra partícula está en reposo . Los casos que pueden darse , en nuestro gas , de interacciones elásticas con fotones , son los de dispersión Thompson por electrones e protones , o Rayleigh por átomos de hidrógeno . Las secciones eficaces correspondientes fueron tomadas del libro de Allen (1962) y son , para el caso de Thompson

$$\sigma_{tot} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left(1 - \frac{2h\nu}{mc^2} \right) \approx 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$$

pues

$$h\nu \ll mc^2$$

y para el caso de Rayleigh , puede aproximarse por

$$\sigma_{tot} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_{1n} \nu^2}{(\nu_n^2 - \nu^2)} \right)^2$$

donde f_{1n} son las fuerzas de oscilador y ν_n las frecuencias de las transiciones de los átomos de hidrógeno al nivel fundamental que está mucho más poblado que los niveles excitados . En esta última fórmula sólo se tuvo en cuenta el nivel excitado con $n=2$, pues la fuerza de oscilador decrece

rápidamente para mayores n .

La variación con el ángulo de ambas secciones eficaces se tomó de la forma $(1 + \mu^2)$ de acuerdo al libro de Akhiezer y Berestetskii, con éste resulta un factor $\frac{3}{16\pi}$ por el que se multiplican las secciones eficaces totales para obtener las diferenciales, e sea

$$\sigma = \sigma_{\text{tot}} \frac{3}{16\pi} (1 + \mu^2)$$

Debe recalcar que el término de colisiones de Boltzmann sólo se usó en el caso en que las partículas A son los fotones, e sea para estudiar el efecto de las partículas masivas sobre los fotones. En el caso inverse se usó el término de colisiones en la forma de Fokker-Planck, con estas mismas fórmulas para las secciones eficaces.

Para calcular la frecuencia del fotón emergente, puede seguirse un procedimiento análogo al anterior con la ecuación de la energía, es decir

$$h\beta_D^2 = h\beta_B^2 + 2\left(\frac{V_A}{V_0}\right) - 2\left(\frac{V_C}{V_0}\right)$$

con $h = \frac{m_B c^2}{h V_0}$, siendo V_0 una frecuencia arbitraria. La ecuación del impulso da

$$h\beta_D^2 = \left(\frac{V_A}{V_0}\right)^2 + h\beta_B^2 - 2h\left(\frac{V_A}{V_0}\right)\beta_A \mu_{AB} + \left(\frac{V_C}{V_0}\right)^2 - 2\left(\frac{V_C}{V_0}\right)\left[\left(\frac{V_A}{V_0}\right)\mu_{AC} + h\beta_B \mu_{BC}\right].$$

De estas ecuaciones, siendo $h \gg \left(\frac{V_A}{V_0}\right)$ resulta

$$V_C = V_A \frac{(1 - \beta_B \mu_{AB})}{(1 - \beta_B \mu_{BC})}$$

lo que equivale a decir que en el sistema de referencia de la partícula B (cuyo impulso no se altera apreciablemente por la colisión), la frecuencia del fotón se conserva.

3.2.7 Ionización y recombinación

Ionización y recombinación, son los procesos inelásticos que se consideran en éste trabajo. Las secciones eficaces son bien conocidas para el

hidrógeno y se dan en los sistemas en que la partícula mas masiva se encuentra en repeso.

La sección eficaz total de ionización está dada por la fórmula usual de Allen (1962) para la ionización desde el nivel fundamental del hidrógeno

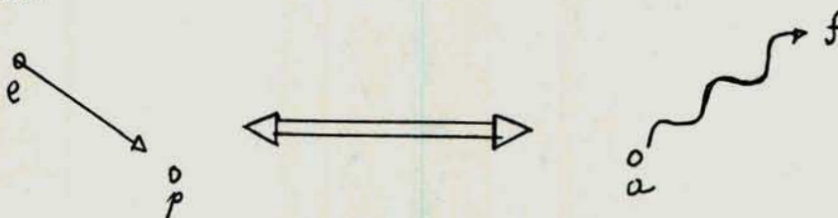
$$\sigma_{tot} = a_v = \frac{64\pi^4}{3\sqrt{3}} \frac{m_e \cdot e^{10}}{c h^6} \frac{g_{II}}{v^3} \approx 6.3 \times 10^{-18} \left(\frac{v_0}{v}\right)^3 \text{ cm}^2$$

donde g_{II} es el factor de Gaunt y v_0 la frecuencia de la cabeza del continuo de Lyman. Aquí, nuevamente para la sección eficaz diferencial se multiplica por $\frac{3}{8\pi}(1-\mu^2)$ (de acuerdo a la aproximación dipolar).

Para la sección eficaz de recombinación, se utiliza la relación de Milne. Esta expresa el balance detallado entre los procesos de ionización y recombinación que se escribe como

$$\frac{3}{8\pi}(1-\mu^2)a_v d\mathcal{V}_v^3 = \frac{v}{c} \sigma d\mathcal{V}_e^3$$

donde $d\mathcal{V}_v^3$ y $d\mathcal{V}_e^3$ son los elementos de volumen del espacio de fase antes definidos, correspondientes a fotones y electrones respectivamente, v es la velocidad del electrón y σ es la sección eficaz diferencial de recombinación



Si también se supone válida la aproximación dipolar para la sección dipolar para la recombinación, se llega a la fórmula

$$a_v \left[\left(\frac{h}{c}\right)^3 v^2 dv \right] = \frac{v}{c} \sigma_{tot} \left[(m_e c)^3 \frac{v^2}{c^3} dv \right]$$

de donde

$$\sigma_{tot} = a_v \frac{v^2 h^3}{c^2 m_e^3 v^3} \frac{dv}{dv}$$

Como , de acuerdo a la conservación de la energía , la frecuencia del fotón emitido es

$$v = v_0 + \frac{m_e v^2}{2h}$$

resulta

$$\sigma_{tot}^{(r)} = a_v \left(\frac{h v}{m_e c v} \right)^2 ; \quad \sigma = \frac{3}{8\pi} (1 - \mu^2) \sigma_{tot}^{(r)}$$

En este proceso , la frecuencia del fotón , y la velocidad del electrón se toman en el sistema de laboratorio , por lo cual deben transformarse luego al sistema del fluido , y las secciones eficaces deberían también transformarse de acuerdo a la fórmula (b 21) . Sin embargo , por ser las velocidades no relativistas , la transformación de la sección eficaz en el caso de la recombinación es la identidad (como puede verificarse usando la fórmula (b21)).

3.3 Términos de colisiones de Landau

Como se mencionó anteriormente , los términos de Landau se usan para las colisiones entre partículas cargadas y describen las interacciones elásticas cargadas y describen las interacciones elásticas con pequeños ángulos de deflexión (ϵ) . Según lo expresado antes , para calcularlos se deben conocer los coeficientes A y B que definen la matriz

$$G_{ij} = \pi \frac{v^3}{c} m_r^2 \left[A \delta_{ij} + (B - A) n_i n_j \right]$$

siendo m_r la masa reducida, v la velocidad relativa y \vec{n} su dirección.

Para calcular los coeficientes A y B, se utilizan las fórmulas de las secciones eficaces de colisión que proporciona el libro de Akhiezer y Berestetskii (1965), según el cual para el caso electrón-electrón

$$\sigma_{ee} = \left(\frac{e^2}{2m_r v^2} \right)^2 \left(\frac{1}{\sin^4 \epsilon} - \frac{3}{4} \frac{1}{\sin^2 \epsilon} \right) \quad ; \quad 0 \leq \epsilon \leq \frac{\pi}{2}$$

y para electrón-protón, la sección eficaz de Rutherford

$$\sigma_{ep} = \left(\frac{e^2}{2m_r v^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \left(\frac{\epsilon}{2} \right)} \quad \text{con} \quad 0 \leq \epsilon \leq \pi$$

donde ϵ es el ángulo de deflexión en el sistema centro de masa.

Estas expresiones fueron derivadas directamente de las dadas por aquel libro, tomando $\gamma=1$. La primera de esas fórmulas fue usada también para el caso protón-protón, y tiene en cuenta que en el caso que nos ocupa, ambas partículas son indistinguibles.

Con estas fórmulas reemplazadas en las expresiones de A y B dadas antes resultan integrales que divergen en el límite inferior ($\epsilon=0$), y por otra parte, las expresiones no son válidas en el límite superior ($\epsilon=\frac{\pi}{2}$ o $\epsilon=\pi$). Por esto, usaremos para los valores límite los símbolos ϵ_0 y ϵ_1 cuyos valores se precisarán luego. Tenemos que

$$A_{ee} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2m_r v^2} \right)^2 \int_{\epsilon_0}^{\epsilon_1} \left(\frac{1}{\sin^2 \epsilon} - \frac{3}{4} \right) \sin \epsilon \, d\epsilon$$

$$B_{ee} = \left(\frac{e^2}{2m_r v^2} \right)^2 \int_{\epsilon_0}^{\epsilon_1} \left(\frac{1}{\sin^2 \epsilon} - \frac{3}{4} \right) (1 - \cos \epsilon)^2 \frac{d\epsilon}{\sin \epsilon}$$

$$A_{ep} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2m_r v^2} \right)^2 \int_{\epsilon_0}^{\epsilon_1} \frac{4 \sin^3 \epsilon}{(1 - \cos \epsilon)^2} \, d\epsilon$$

$$B_{ep} = \left(\frac{e^2}{2m_r v^2} \right)^2 \int_{\epsilon_0}^{\epsilon_1} 4 \sin \epsilon \, d\epsilon$$

Estas integrales dan por resultado

$$A_{ee} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2m_r v^2} \right)^2 \left[\ln \left(t_g \left(\frac{\epsilon}{2} \right) \right) + \frac{3}{4} \cos \epsilon \right]_{\epsilon_0}^{\epsilon_1}$$

$$B_{ep} = \left(\frac{e^2}{2m_r v^2} \right)^2 \left[\frac{(1 - \cos \epsilon)}{\sin^2 \epsilon} - \frac{3}{4} \cos \epsilon - \frac{3}{2} \ln \left(\frac{1 - \cos \epsilon}{\sin^2 \epsilon} \right) \right]_{\epsilon_0}^{\epsilon_1}$$

$$A_{ep} = 2 \left(\frac{e^2}{m_r v^2} \right)^2 \left[\ln \left(\sin \left(\frac{\epsilon}{2} \right) \right) + \cos \left(\frac{\epsilon}{2} \right) \right]_{\epsilon_0}^{\epsilon_1}$$

$$B_{ep} = \left(\frac{e^2}{m_r v^2} \right)^2 \left[-\cos \epsilon \right]_{\epsilon_0}^{\epsilon_1}$$

Como se ve , la divergencia para pequeños ϵ_0 , se produce por el término logarítmico. En éste trabajo sólo se considerarán (como es usual) esos términos y se despreciarán los términos del orden de la unidad , que deberían considerarse si se quisiera aumentar la precisión del cálculo. Por éste , las expresiones se reducen a

$$A_{ee} = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2m_r v^2} \right)^2 \ln \left(t_g \left(\frac{\epsilon_0}{2} \right) \right)$$

$$B_{ee} = 0$$

$$A_{ep} = -2 \left(\frac{e^2}{m_r v^2} \right)^2 \ln \left(\sin \left(\frac{\epsilon_0}{2} \right) \right)$$

$$B_{ep} = 0$$

Para aplicar el procedimiento de corte de la integral, se calcula el valor de ϵ_0 que corresponde al parámetro de impacto b igual a la longitud de Debye ℓ_D , es por la definición de b y σ

$$\sigma \sin \epsilon d\epsilon = b db$$

de donde

$$\frac{1}{2} b_0^2 = \int_{\epsilon_0}^{\epsilon_1} \sigma \sin \epsilon d\epsilon$$

por lo tanto para electrón-electrón

$$\frac{\ell_D^2}{2} = \left(\frac{e^2}{2m_r v^2} \right)^2 \int_{\epsilon_0}^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin^2 \epsilon} - \frac{3}{4} \right) \frac{d\epsilon}{\sin \epsilon} = - \left(\frac{e^2}{2m_r v^2} \right)^2 \left[\frac{\cos \epsilon}{2 \sin^2 \epsilon} + \frac{1}{4} \ln \left(\tan \left(\frac{\epsilon}{2} \right) \right) \right]_{\epsilon_0}^{\pi/2}$$

si el valor de ϵ_0 es muy pequeño, el término logarítmico es despreciable, y resulta,

$$\sin \epsilon_0 = \frac{e^2}{m_A \ell_D v^2} \approx \tan \epsilon_0 \approx \epsilon_0$$

y por lo tanto el factor logarítmico, que se suele denominar "logaritmo caulembiano" es

$$-\ln \left(\tan \left(\frac{\epsilon_0}{2} \right) \right) = \ln \left(\frac{2m_A \ell_D v^2}{e^2} \right) = \ln \Lambda_{ee}$$

siendo

$$\Lambda_{ee} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{m_A v^2} \right)^2 \ln \Lambda_{ee}$$

Para el caso electrón-protón

$$\frac{1}{2} b_0^2 = \left(\frac{e^2}{2m_r v^2} \right)^2 \int_{\epsilon_0}^{\pi} \frac{\sin \epsilon d\epsilon}{\sin^4 \left(\frac{\epsilon}{2} \right)} = - \left(\frac{e^2}{2m_r v^2} \right)^2 \left[\frac{2}{\sin^2 \left(\frac{\epsilon}{2} \right)} \right]_{\epsilon_0}^{\pi}$$

resulta siendo $m_r \approx m_e$

$$\ln\left(\frac{\epsilon_0}{2}\right) = \frac{e^2}{m_e \epsilon_D v^2}$$

y en este caso el logaritmo coulombiano vale

$$-\ln\left(\ln\left(\frac{\epsilon_0}{2}\right)\right) = \ln\left(\frac{m_e \epsilon_D v^2}{e^2}\right) = \ln \Lambda_{ep}$$

Luego

$$\Lambda_{ep} = 2 \left(\frac{e^2}{m_r v^2} \right)^2 \ln \Lambda_{ep}$$

Como se mencionó, para protón-protón se usó la misma fórmula que para electrón-electrón (con la masa correspondiente).

Reemplazando en la expresión de G_{ij} , se ve que se anula el factor m_r y resulta

$$G_{ij}^{ee} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{e^2}{m_A c^2} \right)^2 \frac{\ln \Lambda_{ee}}{\beta} \left(\delta_{ij} - \frac{\beta_i \beta_j}{\beta^2} \right) (m_A c)^2$$

$$\left(\text{siendo } \beta = \frac{v}{c} \quad \text{y} \quad \beta_i = v_i \beta \right),$$

$$G_{ij}^{ep} = 2\pi \left(\frac{e^2}{m_A c^2} \right)^2 \frac{\ln \Lambda_{ep}}{\beta} \left(\delta_{ij} - \frac{\beta_i \beta_j}{\beta^2} \right) (m_A c)^2$$

Estas expresiones pueden sintetizarse en la fórmula

$$G_{ij} = \frac{\Gamma}{\beta} \left(\delta_{ij} - \frac{\beta_i \beta_j}{\beta^2} \right) (m_A c)^2 = G_{ij}^* (m_A c)^2$$

con

$$\Gamma_{ee} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{e^2}{m_A c^2} \right)^2 \ln \Lambda_{ee}$$

$$\Gamma_{ep} = 2\pi \left(\frac{e^2}{m_A c^2} \right)^2 \ln \Lambda_{ep}$$

Si esta expresión de G_{ij} , se reemplaza en la fórmula del término de colisiones de Landau, queda (siguiendo la convención de suma sobre los índices repetidos)

$$\xi_A = \psi_{ij} \frac{\partial^2 f_A}{\partial \beta_{Ai} \partial \beta_{Aj}} - \phi'_i \frac{\partial f_A}{\partial \beta_{Ai}} - \chi' f_A$$

donde

$$\psi_{ij} = \int G_{ij}^* f_B d\mathbf{p}_B^3$$

$$\phi'_i = \frac{m_A}{m_B} \int G_{ij}^* \frac{\partial f_B}{\partial \beta_{Bj}} d\mathbf{p}_B^3 - \int \frac{\partial G_{ij}^*}{\partial \beta_{Aj}} f_B d\mathbf{p}_B^3$$

$$\chi' = \frac{m_A}{m_B} \int \frac{\partial G_{ij}^*}{\partial \beta_{Ai}} \frac{\partial f_B}{\partial \beta_{Bj}} d\mathbf{p}_B^3$$

Para expresar estos coeficientes, se utilizan las expresiones de los operadores $\frac{\partial}{\partial \beta_{Ai}}$ de a_1

Por otra parte, se ve fácilmente que, por ser $\frac{\partial(\frac{\Gamma}{\beta^3})}{\partial \beta_{Ai}} \propto \beta_{Ai}$ es

$$\frac{\partial(\frac{\Gamma}{\beta^3})}{\partial \beta_{Ai}} (\beta^2 \delta_{ij} - \beta_i \beta_j) = 0$$

Tenemos entonces que

$$\frac{\partial G_{ij}^*}{\partial \beta_{Ai}} = -2 \frac{\Gamma}{\beta^3} \beta_i$$

con lo cual quedan las fórmulas mas compactas

$$\chi' = -2 \left(\frac{m_A}{m_B} \right) \int \frac{\Gamma}{\beta^3} \beta_j \frac{\partial f_B}{\partial \beta_{Bj}} d\mathbf{p}_B^3$$

$$\phi'_i = \left(\frac{m_A}{m_B} \right) \int G_{ij}^* \frac{\partial f_B}{\partial \beta_{Bj}} d\mathbf{p}_B^3 + 2 \int \frac{\Gamma}{\beta^3} \beta_i f_B d\mathbf{p}_B^3$$

Luego de sustituciones y elaboración algebraica, se obtienen las expresiones

$$\begin{aligned}
 \chi' &= -2 \left(\frac{m_A}{m_B} \right) \int \frac{\Gamma}{\beta^2} \left[(\vec{n} \cdot \vec{n}_B) \frac{\partial f_B}{\partial \beta_B} + \frac{\mu - \mu_B (\vec{n} \cdot \vec{n}_B)}{\beta_B} \frac{\partial f_B}{\partial \mu_B} \right] d\rho_B^3 \\
 \phi_i' \frac{\partial}{\partial \beta_{Ai}} &= \left(\frac{m_A}{m_B} \right) \int \frac{\Gamma}{\beta} \left\{ \left[(\vec{n}_A \cdot \vec{n}_B) - (\vec{n} \cdot \vec{n}_A) (\vec{n} \cdot \vec{n}_B) \right] \frac{\partial f_B}{\partial \beta_B} + \right. \\
 &+ \frac{[\mu_A - \mu_B (\vec{n}_A \cdot \vec{n}_B)] - (\vec{n} \cdot \vec{n}_A) [\mu - \mu_B (\vec{n} \cdot \vec{n}_B)]}{\beta_B} \frac{\partial f_B}{\partial \mu_B} \left. \right\} \frac{\partial}{\partial \beta_A} + \\
 &+ \left\{ \frac{[\mu_B - \mu_A (\vec{n}_A \cdot \vec{n}_B)] - (\vec{n} \cdot \vec{n}_B) [\mu - \mu_A (\vec{n} \cdot \vec{n}_A)]}{\beta_A} \frac{\partial f_B}{\partial \beta_B} + \right. \\
 &+ \left. \frac{[3 - \mu_A^2 - \mu_B^2 + \mu_A \mu_B (\vec{n}_A \cdot \vec{n}_B)] - [\mu - \mu_A (\vec{n} \cdot \vec{n}_A)] [\mu - \mu_B (\vec{n} \cdot \vec{n}_B)]}{\beta_A \beta_B} \frac{\partial f_B}{\partial \mu_B} \right\} \frac{\partial}{\partial \mu_A} \left. \right\} d\rho_B^3 + \\
 &+ 2 \int \frac{\Gamma}{\beta^2} \left[(\vec{n} \cdot \vec{n}_A) \frac{\partial}{\partial \beta_A} + \frac{\mu - \mu_A (\vec{n} \cdot \vec{n}_A)}{\beta_A} \frac{\partial}{\partial \mu_A} \right] f_B d\rho_B^3
 \end{aligned}$$

donde los valores sin subíndice corresponden a la velocidad relativa.

Y elaborando el otro término, se puede escribir

$$\psi_{ij} \frac{\partial^2}{\partial \beta_{Ai} \partial \beta_{Aj}} = \alpha_{\beta\beta} \frac{\partial^2}{\partial \beta_A^2} + \alpha_{\mu\mu} \frac{\partial^2}{\partial \mu_A^2} + \alpha_{\beta\mu} \frac{\partial^2}{\partial \beta_A \partial \mu_A} + \alpha_{\beta} \frac{\partial}{\partial \beta_A} + \alpha_{\mu} \frac{\partial}{\partial \mu_A}$$

y las expresiones para las α son

$$\alpha_{\beta\beta} = \int \frac{\Gamma}{\beta} [1 - (\vec{n} \cdot \vec{n}_A)^2] f_B d\rho_B^3$$

$$\alpha_{\mu\mu} = \int \frac{\Gamma}{\beta} \left\{ \frac{(1 - \mu_A^2) - [\mu_A (\vec{n} \cdot \vec{n}_A) - \mu]^2}{\beta_A^2} \right\} f_B d\rho_B^3$$

$$\alpha_{\beta\mu} = 2 \int \frac{\Gamma}{\beta} \left\{ \frac{(\vec{n} \cdot \vec{n}_A) [\mu_A (\vec{n} \cdot \vec{n}_A) - \mu]}{\beta_A} \right\} f_B d\rho_B^3$$

$$\alpha_{\beta} = \int \frac{\Gamma}{\beta} \left[\frac{1 + (\vec{n} \cdot \vec{n}_A)^2}{\beta_A} \right] f_B d\rho_B^3$$

$$\alpha_{\mu} = - \left(\frac{\alpha_{\beta\mu} + \mu_A \alpha_{\beta}}{\beta_A} \right)$$

3.4 Términos de colisiones de Fokker-Planck

Para éstos, se emplea una fórmula similar a la del caso anterior

$$\xi_A = \psi_{ij} \frac{\partial^2 f_A}{\partial \beta_{Ai} \partial \beta_{Aj}} - \phi'_i \frac{\partial f_A}{\partial \beta_{Ai}} - \chi' f_A$$

Donde

$$\psi_{ij} = \frac{\langle \Delta p_i \Delta p_j \rangle}{2 (m_{AC})^2}$$

$$\phi'_i = \frac{\langle \Delta p_i \rangle}{(m_{AC})} - \frac{\partial}{\partial \beta_{Ai}} \left[\frac{\langle \Delta p_i \Delta p_j \rangle}{2 (m_{AC})^2} \right]$$

$$\chi' = \frac{\partial}{\partial \beta_{Ai}} \left[\frac{\langle \Delta p_i \rangle}{(m_{AC})} \right]$$

Usando las fórmulas dadas antes para $\langle \Delta p_i \rangle$, $\langle \Delta p_i \Delta p_j \rangle$, A , B y D en (48 RC).

En el caso de la dispersión Thompson, la velocidad relativa es C , y por anularse las derivadas de $\langle \Delta p_i \rangle$ y $\langle \Delta p_i \Delta p_j \rangle$ (además el sistema centro de masa debe sustituirse por el de laboratorio) resultan,

$$\frac{\langle \Delta p_i \rangle}{(m_A C)} = -m_i 2\pi \int \left(\frac{\hbar V}{m_A C^2} \right) D f_V dp_V^3$$

$$\frac{\langle \Delta p_i \Delta p_j \rangle}{2(m_A C)^2} = \pi \int \left(\frac{\hbar V}{m_A C^2} \right)^2 [A \delta_{ij} + (B-A) n_i n_j] f_V dp_V^3$$

y

$$D = \left(\frac{e^2}{m_A C^2} \right)^2 \frac{8}{3}$$

$$A = \left(\frac{e^2}{m_A C^2} \right)^2 \frac{4}{5}$$

$$B = \left(\frac{e^2}{m_A C^2} \right)^2 \frac{56}{15}$$

De aquí se obtienen las expresiones

$$\chi' = 0$$

$$\phi_i' \frac{\partial f_A}{\partial \beta_{A_i}} = -\frac{16}{3} \pi \left(\frac{e^2}{m_A C^2} \right)^2 \int \left(\frac{\hbar V}{m_A C^2} \right) \left\{ (\vec{n}_A \cdot \vec{n}_f) \frac{\partial f_A}{\partial \beta_A} + \frac{[\mu_f - \mu_A (\vec{n}_A \cdot \vec{n}_f)]}{\beta_A} \frac{\partial f_A}{\partial \mu_A} \right\} f_V dp_V^3$$

$$\chi_{ij}' \frac{\partial^2 f_A}{\partial \beta_{A_i} \partial \beta_{A_j}} = \alpha_{\beta\beta} \frac{\partial^2 f_A}{\partial \beta_A^2} + \alpha_{\mu\mu} \frac{\partial^2 f_A}{\partial \mu_A^2} + \alpha_{\beta\mu} \frac{\partial^2 f_A}{\partial \beta_A \partial \mu_A} + \alpha_{\beta} \frac{\partial f_A}{\partial \beta_A} + \alpha_{\mu} \frac{\partial f_A}{\partial \mu_A}$$

$$\alpha_{\beta\beta} = \frac{4}{5} \pi \left(\frac{e^2}{m_A C^2} \right)^2 \int \left(\frac{\hbar V}{m_A C^2} \right)^2 \left[1 + \frac{11}{3} (\vec{n}_A \cdot \vec{n}_f)^2 \right] f_V dp_V^3$$

$$\alpha_{\mu\mu} = \frac{4}{5} \pi \left(\frac{e^2}{m_A C^2} \right)^2 \int \left(\frac{\hbar V}{m_A C^2} \right)^2 \left\{ (1 - \mu_A^2) + \frac{11}{3} [\mu_f - \mu_A (\vec{n}_A \cdot \vec{n}_f)]^2 \right\} f_V dp_V^3$$

$$\alpha_{\beta\mu} = \frac{88}{15} \pi \left(\frac{e^2}{m_A C^2} \right)^2 \int \left(\frac{\hbar V}{m_A C^2} \right)^2 \left\{ (\vec{n}_A \cdot \vec{n}_f) [\mu_f - \mu_A (\vec{n}_A \cdot \vec{n}_f)] \right\} f_V dp_V^3$$

$$\alpha_{\beta} = \frac{4}{5} \pi \left(\frac{e^2}{m_A C^2} \right)^2 \int \left(\frac{\hbar V}{m_A C^2} \right)^2 \left[2 + \frac{11}{3} (1 - \mu_f^2) \right] f_V dp_V^3$$

y α_μ como antes.

En el caso del término de colisiones en la ecuación cinética de los átomos debida a la interacción con electrones, usando la expresión correspondiente, resultan

$$\sigma = a(1 + b\nu + d\nu^2)$$

$$\frac{\langle \Delta p_i \rangle}{(m_a c)} = -\frac{2\pi}{c^2} \left(\frac{m_e}{m_a} \right) \int \nu_i \nu D f_e d\rho_e^3$$

$$\frac{\langle \Delta p_i \Delta p_j \rangle}{(m_a c)^2} = \frac{2\pi}{c^3} \left(\frac{m_e}{m_a} \right)^2 \int [\nu^3 A \delta_{ij} + \nu(B-A) \nu_i \nu_j] f_e d\rho_e^3$$

y son

$$D = 2a \left[1 - \frac{(b-d)}{3} \right]$$

$$B = \frac{8a}{3} \left(1 - \frac{b}{2} + \frac{2}{5} d \right)$$

$$A = \frac{2a}{3} \left(1 + \frac{d}{5} \right)$$

Con las definiciones de χ' , ϕ'_i , χ_{ij} , y las igualdades

$$\frac{\partial}{\partial \nu_{Ai}} = \frac{\partial \nu}{\partial \nu_{Ai}} \frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{\nu_i}{\nu} \frac{\partial}{\partial \nu}$$

$$\nu_i = \nu \frac{\partial \nu}{\partial \nu_{Ai}} = -\nu^2 \frac{\partial \left(\frac{1}{\nu} \right)}{\partial \nu_{Ai}}$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\nu_i}{\nu} \right)}{\partial \nu_j} = \frac{1}{\nu} \left(\delta_{ij} - \frac{\nu_i \nu_j}{\nu^2} \right)$$

resultan

$$\chi' = -\frac{2\pi}{c} \left(\frac{m_e}{m_a} \right) \int \nu \frac{d(\nu D)}{d\nu} f_e d\rho_e^3$$

$$\phi'_i \frac{\partial f_a}{\partial \beta_{ai}} = -\frac{\pi}{c^2} \left(\frac{m_e}{m_a} \right) \int \left\{ \nu^2 \left[2D + \left(\frac{m_e}{m_a} \right) (B-A) \right] + \left(\frac{m_e}{m_a} \right) \frac{d(\nu^3 B)}{d\nu} \right\} \cdot$$

$$\cdot \left\{ (\vec{m}_i \cdot \vec{m}_a) \frac{\partial f_a}{\partial \beta_a} + \frac{[\nu - \nu_A (\vec{m}_i \cdot \vec{m}_A)]}{\beta_a} \frac{\partial f_a}{\partial \nu_a} \right\} f_e d\rho_e^3$$

y

$$\alpha_{\beta\beta} = \frac{\pi}{c^3} \left(\frac{m_e}{m_a} \right)^2 \int v^3 \left[A + (B-A)(\vec{n} \cdot \vec{n}_a)^2 \right] f_e dp_e^3$$

$$\alpha_{\beta\mu} = \frac{2\pi}{\beta_a c^3} \left(\frac{m_e}{m_a} \right)^2 \int v^3 (B-A)(\vec{n} \cdot \vec{n}_a) [\mu - \mu_a(\vec{n} \cdot \vec{n}_a)] f_e dp_e^3$$

$$\alpha_{\mu\mu} = \frac{\pi}{\beta_a^2 c^3} \left(\frac{m_e}{m_a} \right)^2 \int v^3 \left\{ A(1-\mu_a^2) + (B-A)[\mu - \mu_a(\vec{n} \cdot \vec{n}_a)]^2 \right\} f_e dp_e^3$$

$$\alpha_{\beta} = \frac{\pi}{\beta_a c^3} \left(\frac{m_e}{m_a} \right)^2 \int v^3 \left\{ 2A + (B-A)[1 - (\vec{n} \cdot \vec{n}_a)^2] \right\} f_e dp_e^3$$

más la fórmula usual para α_{μ} .

3.5 Expresión numérica de operadores

Analizando los operadores θ^a y θ^s de las fórmulas (21), se ve que en ellos se incluyeron los términos ϕ_3^s y ϕ_3^a que contienen las fuerzas externas. Se ve inmediatamente que si la fuerza es independiente de la velocidad, $\phi_3^a = 0$.

Como se trabaja en un caso unidimensional, las únicas fuerzas externas que se pueden considerar, son la gravitatoria, la del campo eléctrico y la del campo magnético. Todos los campos deben tener dirección paralela a z y ser constantes. En el presente trabajo no consideraré las fuerzas gravitatorias por no ser importantes en los problemas de atmósferas estelares y no se considerará el campo magnético, pues sólo modifica los coeficientes transversales que no pueden ser calculados en el modelo unidimensional.

Resulta entonces

$$\phi_3^s = \frac{ze^2}{mc} E^* \quad (22)$$

siendo $E^* = \frac{E}{e}$ y con Z la carga eléctrica respecto de la del protón (-1 para electrones, +1 para protones, 0 para átomos). Se toma la convención de dividir el campo eléctrico por la carga del protón para simplificar los problemas de unidades.

Por otra parte, se supone que el campo eléctrico no es demasiado grande ($\theta^a f^a$ es de segundo orden como se dijo antes), así como son pequeños los gradientes de los parámetros macroscópicos, por lo cual, los términos

$$\beta \nu \frac{\partial f^s}{\partial z} \quad y \quad \theta^a f^s \quad (982)$$

son de primer orden, en la ecuación (a 15).

Como se dijo antes, se tomará la primera iteración en el método Newton-Raphsen generalizado y se partirá de la aproximación a orden cero

$$f^a = 0 \quad y \quad f^s = F.$$

Cuando se considera la fuerza externa, la segunda de las ecuaciones (a 20) debe alterarse sumando al miembro izquierdo el término

$$\phi_3^s \left(\nu \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{(1-\nu^2)}{\beta} \frac{\partial}{\partial \nu} \right) F \equiv C \phi_3^s \frac{\partial F}{\partial v_3} \quad (983)$$

el cual, usando la forma de F dada por (95), vale

$$-\frac{Ze^2}{8T} \left(\nu \beta - \frac{\mu_3}{c} \right) E^* F \quad (984)$$

Como los cálculos se efectuarán en el sistema del fluido, agregando el término debido a la fuerza externa a la ecuación (a 22), resulta para las partículas

$$\begin{aligned} & -F \nu \beta \left[\frac{d \ln n}{dz} + \left(x^3 - \frac{3}{2} \right) \frac{d \ln T}{dz} + \frac{mc^2}{8T} \nu \beta \frac{d \rho_0}{dz} + \frac{Ze^2}{8T} E^* \right] = \\ & = (\theta^s - \mathcal{D}^s) \delta f^a + \delta f^a \left(\frac{\partial \theta^a}{\partial f^a} F - \frac{\partial n^a}{\partial f^a} - \frac{\partial \mathcal{D}^a}{\partial f^a} F \right) \end{aligned} \quad (985)$$

y para los fotones

$$-F_\nu \mu \left[\frac{d \ln W}{d\gamma} + \frac{e^{x_\nu}}{e^{x_\nu} - 1} x_\nu \frac{d \ln T_R}{d\gamma} \right] = \chi_s \delta f^a + \delta f^a \left(\frac{\partial \chi^a}{\partial f^a} F - \frac{\partial n^a}{\partial f^a} \right).$$

En este trabajo, resuelve este sistema de ecuaciones linealizado en forma numérica, el sistema de ecuaciones es integrodiferencial, y en las integrales deben considerarse los casos con ambos signos de μ (al integrar sobre $d\mu_B$ y $d\mu_C$), por lo cual, se deben considerar las fórmulas (214), a partir de las cuales, se ve que los términos con χ^s , χ'^s , ϕ'^s , \mathcal{B}^s , que corresponden a integrales sobre $d\mu_B^3$ contienen la suma de los valores para $\mu_B > 0$ y para $\mu_B < 0$, mientras que en las derivadas respecto a f_B^a , tienen signo positivo los términos con

$\mu_B > 0$ y negativo con $\mu_B < 0$. Análogamente, para la derivada de n^a respecto de f_c^a y f_d^a , los términos correspondientes tendrán los signos de μ_c y μ_d respectivamente.

Usando las expresiones explícitas de los coeficientes, se efectuaron las derivadas formales respecto a los f^a . Los operadores derivada y derivada segunda se expresaron en forma de diferencias finitas para el operador $(\partial^s - \partial^s)$ y en los otros casos se usó $\frac{\partial F}{\partial \mu} = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial \beta} = -\left(\frac{mc^2}{kT}\right) \beta F$. (886)

El método usual de diferencias finitas, no puede ser aplicado a menos que se utilice una partición muy fina en la energía, pues de acuerdo a los cálculos con el método CHE y los de Spitzer, los δf^a tienen una variación con la energía similar a la de F , a la cual se agrega otra variación menos abrupta. Por éste, se expresaron solamente las derivadas respecto a μ como

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \mu} \right)_i = \frac{1}{2} \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{\mu_{i+1} - \mu_i} + \frac{f_i - f_{i-1}}{\mu_i - \mu_{i-1}} \right) \quad (887)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} \right)_i = \frac{2}{(\mu_{i+1} - \mu_{i-1})} \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{\mu_{i+1} - \mu_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{\mu_i - \mu_{i-1}} \right)$$

con $f_i = f(\mu_i)$, etc.

• sea que si se usa la expresión para los operadores

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \mu^n}\right)_i = A_i^{(n)} f_{i-1} + B_i^{(n)} f_i + C_i^{(n)} f_{i+1}$$

son

$$A^{(1)} = \frac{-1}{2\Delta\mu^-} \quad ; \quad A^{(2)} = \frac{2}{\Delta\mu^0 \Delta\mu^-} \quad (988)$$

$$B^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta\mu^-} - \frac{1}{\Delta\mu^+} \right) \quad ; \quad B^{(2)} = \frac{-2}{\Delta\mu^0} \left(\frac{1}{\Delta\mu^-} + \frac{1}{\Delta\mu^+} \right)$$

$$C^{(1)} = \frac{1}{2\Delta\mu^+} \quad ; \quad C^{(2)} = \frac{2}{\Delta\mu^0 \Delta\mu^+}$$

siendo $\Delta\mu^- = \mu_i - \mu_{i-1}$; $\Delta\mu^+ = \mu_{i+1} - \mu_i$; $\Delta\mu^0 = \mu_{i+1} - \mu_{i-1}$.

Estas fórmulas son válidas para los puntos intermedios , pero no en los extremos : $i=1$, $i=n_\mu$ (donde n_μ es el índice del último punto en la partición para μ).

Para los puntos extremos se usan expresiones compatibles con las condiciones de centro que están relacionadas con la simetría. Para ello se adoptan las formas

$$f^a = r_\mu + s_\mu (1 - \mu^2) \quad (989)$$

$$f^s = r + s(1 - \mu^2)$$

donde se supone que r , y s son independientes de μ en el entorno del punto considerado. Resultan entonces

$$\frac{\partial f^a}{\partial \mu} = r + s(1 - 3\mu^2) \quad ; \quad \frac{\partial^2 f^a}{\partial \mu^2} = -6s\mu$$

$$\frac{\partial f^s}{\partial \mu} = -2s\mu$$

$$; \quad \frac{\partial^2 f^s}{\partial \mu^2} = -2s$$

(990)

y por otra parte, los valores de n y S se despejan de las ecuaciones (999) para los puntos $(1, 2)$, $(n_{\mu}-1, n_{\mu})$ según corresponda. Reemplazando esos valores en las (9910), quedan

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f^a}{\partial \mu}\right)_1 &= \frac{f_1^a}{\mu_1} + \frac{2\mu_1^2}{(\mu_2^2 - \mu_1^2)} \left(\frac{f_2^a}{\mu_2} - \frac{f_1^a}{\mu_1}\right) \\ \left(\frac{\partial^2 f^a}{\partial \mu^2}\right)_1 &= \frac{6\mu_1}{(\mu_2^2 - \mu_1^2)} \left(\frac{f_2^a}{\mu_2} - \frac{f_1^a}{\mu_1}\right) \\ \left(\frac{\partial f^s}{\partial \mu}\right)_1 &= \frac{2\mu_1}{(\mu_2^2 - \mu_1^2)} (f_2^s - f_1^s) \\ \left(\frac{\partial^2 f^s}{\partial \mu^2}\right)_1 &= \frac{2}{(\mu_2^2 - \mu_1^2)} (f_2^s - f_1^s) \end{aligned} \quad (9911)$$

y para los valores en el punto n_{μ} , basta con reemplazar los índices 2 por n_{μ} y los 1 por $(n_{\mu}-1)$ en μ y f .

De éstas expresiones sólo se usaron las derivadas de las f^a , pero se calcularon los demás también, pues serán necesarios para la siguiente iteración del método Newton-Raphson generalizado (NR). De las expresiones (9911) se tomaron los factores (b_1^m, c_1^m) y $(A_{n_{\mu}}^m, b_{n_{\mu}}^m)$ para las fórmulas equivalentes a las (998).

De acuerdo a lo dicho, adaptaré una expresión más complicada para la representación numérica de los operadores derivada respecto a β , que resuelve numéricamente sólo la variación menos abrupta.

Esto se hizo adoptando la forma

$$f^a = g F \quad (9912)$$

donde g es una función incógnita, que corresponde a descontar la F (que varía abruptamente pero en forma conocida) de la f^a . Y se supone que la g varía suavemente en la partición elegida y puede ser calculada por diferencias finitas.

La elección de ésta forma, con su aparente intrascendencia, en realidad implica fuertes condiciones sobre la f^a como que el valor de f^a

y todas sus derivadas para β muy altos, tienden a cero en la forma determinada por F. Las condiciones asintóticas para infinito que esto implica, son adecuadas, pero no necesariamente las únicas adecuadas. No es la intención del presente trabajo profundizar en este tema y sólo mencionaré que en el método CHE se expresa la f^a en la forma (9912), siendo g desarrollada en serie, y de acuerdo al libre de CHO de ésta manera se obtiene una única solución normal, o sea que f^a sólo depende de los valores y gradientes locales de los parámetros macroscópicos. Por supuesto en algunos casos reales, la solución adecuada, puede no ser normal, pero esto estaría conectada con los casos en que el libre camino medio no es demasiado pequeño respecto de las longitudes características, y por lo tanto la componente no térmica ("free-streaming") tiene influencia sobre la componente térmica. Esa influencia es la que se desprecia en la solución normal, lo cual provoca las variaciones conocidas en los flujos transportados antes de alcanzarse los valores de saturación.

Tomando la derivada de la fórmula (9912) es

$$\begin{aligned}\frac{\partial f^a}{\partial \beta} &= -\alpha \beta f^a + F \frac{\partial g}{\partial \beta} \\ \frac{\partial^2 f^a}{\partial \beta^2} &= \alpha (\alpha \beta^2 - 1) f^a - 2\alpha \beta F \frac{\partial g}{\partial \beta} + F \frac{\partial^2 g}{\partial \beta^2}\end{aligned}\tag{9913}$$

$$\text{con } \alpha = \frac{mc^2}{kT}.$$

Usando para las derivadas de g , las expresiones dadas en (998) se pueden obtener los coeficientes de la expresión

$$\left(\frac{\partial^n f^a}{\partial \beta^n} \right)_i = A_i^{(n)} f_{i-1}^a + B_i^{(n)} f_i^a + C_i^{(n)} f_{i+1}^a$$

$$\text{con } f_i^a = f^a(\beta_i), \text{ etc.}$$

$$A_i^1 = \frac{-F_i}{2F_{i-1} \Delta\beta^-}$$

$$C_i^1 = \frac{F_i}{2F_{i+1} \Delta\beta^+}$$

$$\beta_i^1 = -\alpha\beta_i + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta\beta^-} - \frac{1}{\Delta\beta^+} \right) \quad (gg 14)$$

$$A_i^2 = \alpha\beta_i \frac{F_i}{F_{i-1} \Delta\beta^-} + \frac{2F_i}{F_{i-1} \Delta\beta^0 \Delta\beta^-}$$

$$C_i^2 = -\alpha\beta_i \frac{F_i}{F_{i+1} \Delta\beta^+} + \frac{2F_i}{F_{i+1} \Delta\beta^0 \Delta\beta^+}$$

$$\beta_i^2 = \alpha(\alpha\beta_i^2 - 1) - \alpha\beta_i \left(\frac{1}{\Delta\beta^-} - \frac{1}{\Delta\beta^+} \right) - \frac{2}{\Delta\beta^- \Delta\beta^+}$$

En éstas fórmulas, puede eliminarse el coeficiente de normalización de las F y tomar $F \equiv e^{-\alpha \frac{\beta^2}{2}}$.

Para los puntos extremos se adoptaron, luego de varias pruebas, las siguientes condiciones de contorno

$$g_1(\beta) = r\beta + s\beta^3$$

$$g_{m_\beta}(\beta) = r\beta^3 + s\beta^5$$

siendo m_β la cantidad de intervalos en la partición de β . La forma usada para la menor velocidad, cumple las condiciones $g_1(0) = 0$ y $\left(\frac{d^2 g_1}{d\beta^2}\right) = 0$ que son necesarias por la antisimetría de δf^a , pues la inversión del signo de β equivaldría a invertir el signo de μ y sumar π al ángulo φ .

Para la mayor velocidad, las condiciones son más difíciles de plantear y se adoptó una fórmula con potencias impares de β por suponer que éstas siguen las condiciones para la menor velocidad. Pero se eligieron potencias mayores pues las soluciones exactas, para un gas de Lorentz usando término de colisiones de Landau, sugieren dependencias de g en β^4 y β^6 que se aproximan a los valores tomados. Como se ve, los argumentos presentados no son de mucho peso, pero se efectuaron ensayos manteniendo la forma de la suma de dos términos con diferentes potencias en β para una variedad de potencias, y se verificó que ello sólo produce cambios importantes en los resultados de Sf^a para las dos mayores velocidades, y no afecta significativamente los valores de los coeficientes de transporte. Esto es debido a que, con la partición usada, el factor F domina sobre el g para las altas velocidades, y desacepla los valores de esos Sf^a (y de la condición de centerno) de los valores a velocidades menores.

Para analizar ambas condiciones, se usa la fórmula

$$g = r\beta^a + s\beta^b$$

de la cual resultan

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \beta}\right)_n = \frac{ar\beta_n^{a-1} + bs\beta_n^{b-1}}{\beta_n}$$

$$\left(\frac{\partial^2 g}{\partial \beta^2}\right)_n = \frac{a(a-1)r\beta_n^{a-2} + b(b-1)s\beta_n^{b-2}}{\beta_n^2}$$

Despejando los valores de r y s a partir de los valores de g_n y g_b

, siendo $n=1$, $b=2$ para la menor velocidad, y $n=n_p$,

$b=n_p-1$ para la mayor velocidad, se obtienen las siguientes expresiones para los coeficientes B y D

$$D_n' = \frac{-1}{\beta_n} \left[\frac{(a-b)\beta_n^b \beta_b^{-a}}{\beta_b^{(b-a)} - \beta_n^{(b-a)}} \right] \frac{F_n}{F_b}$$

$$B_m^1 = -\alpha \beta_m + \frac{1}{\beta_m} \left[\frac{a \beta_b^{(b-a)} - b \beta_m^{(b-a)}}{\beta_b^{(b-a)} - \beta_m^{(b-a)}} \right]$$

$$D_m^2 = -2\alpha \beta_m D_m^1 - \frac{1}{\beta_m^2} \left\{ \frac{\beta_m^b \beta_b^{-a} [a(a-1) - b(b-1)]}{\beta_b^{(b-a)} - \beta_m^{(b-a)}} \right\} \frac{F_m}{F_b}$$

$$B_m^2 = \alpha (\alpha \beta_m^2 - 1) - 2\alpha \beta_m B_m^1 + \frac{1}{\beta_m^2} \left[\frac{a(a-1) \beta_b^{(b-a)} - b(b-1) \beta_m^{(b-a)}}{\beta_b^{(b-a)} - \beta_m^{(b-a)}} \right].$$

Estos valores se usaron para expresar las derivadas

$$\left(\frac{\partial^q f^a}{\partial \beta^q} \right)_1 = B_1^{(q)} f_1^a + D_1^{(q)} f_2^a$$

$$\left(\frac{\partial^q f^a}{\partial \beta^q} \right)_{n_\beta} = A_{n_\beta}^{(q)} f_{n_\beta-1}^a + B_{n_\beta}^{(q)} f_{n_\beta}^a.$$

Debe destacar que el problema de la especificación de las condiciones de centerne para el punto n_β , está íntimamente relacionado con lo mencionado sobre la influencia de la componente no térmica, y de acuerdo a lo citado del libre CHC, esa condición no tendrá (en el caso presente) influencia sobre la mayoría de las partículas ni sobre los coeficientes de transporte.

Esta misma cuestión de la condición de centerne en los términos de Landau y Fokker-Planck, está presente en forma mas sutil en los términos de Boltzmann, para los cuales vale también lo dicho sobre la posible influencia de la componente no térmica en la parte intermedia de las distribuciones, en éste caso, la expansión en una serie convergente de polinomios de Laguerre de la función g multiplicado por F , cumpliría un papel análogo a la condición de centerne en el caso de Landau y Fokker-Planck.

En el presente cálculo numérico, se han planteado las ecuaciones cinéticas para la partición del espacio de velocidades según β_A y μ_A

($\varphi_A = 0$) , y las integrales fueren expresadas en forma numérica de acuerdo a

$$\int f d\beta = \sum_{i=1}^{m_\beta} f_i w_{\beta_i}$$

$$\int f d\mu = \sum_{j=1}^{m_\mu} f_j w_{\mu_j}$$

Sin embargo, existe el problema en los términos de Boltzmann de que fijados los valores de $(\beta_B, \mu_B, \varphi_B)$ para la partícula B , y los de (μ_C, φ_C) para la partícula C , los valores de β_C y $(\beta_D, \mu_D, \varphi_D)$ no corresponderán en general a los valores centrales del intervalo en que están comprendidos. Para reducir los errores en las derivadas de n^a , es necesario corregir los valores formales que provienen de la factorización (eq 12) por el cociente de dos valores de la función de distribución de la forma

$$\left(\frac{\partial n^a}{\partial f_c^a} \right)_i = W \frac{F(\beta_c)}{F(\beta_i)}$$

donde β_c es el valor actual de β para la partícula C y β_i es el valor central de β en el intervalo al que pertenece ese valor β_c .

Un procedimiento análogo se sigue para $\frac{\partial n^a}{\partial f_D^a}$.

El sistema de ecuaciones resultantes, se puede expresar en la forma vectorial

$$\sum_{\alpha} \vec{\Gamma}_{N_\alpha} \frac{d \ln n_\alpha}{d z} + \vec{\Gamma}_T \frac{d \ln T}{d z} + \vec{\Gamma}_\mu \frac{d \beta_0}{d z} + \vec{\Gamma}_E E^* = - \vec{M} \cdot \vec{\delta f}^a$$

donde cada componente corresponde a un intervalo β y μ , en adelante, se eliminará la flecha y se considerará implícita.

Se hallan las soluciones $\delta f_{N_\alpha}^a$, δf_T^a , δf_μ^a y δf_E^a

anulando todos excepto uno de los gradientes, con lo que resulta, en general,

$$\delta f^a = \sum_{\alpha} \delta f_{N\alpha}^a z_{N\alpha} + \delta f_T^a z_T + \delta f_u^a z_u + \delta f_E^a z_E$$

$$z_{N\alpha} = \frac{d \ln n_{\alpha}}{dz} \quad ; \quad z_T = \frac{d \ln T}{dz} \quad ; \quad z_u = \frac{d \beta_0}{dz} \quad ; \quad z_E = E^*$$

con

$$\delta f_{N\alpha}^a = -M^{-1} \Gamma_{N\alpha}$$

donde $\Gamma_{N\alpha}$ tiene valores sólo en las posiciones ocupadas por la especie α , y

$$\delta f_T^a = -M^{-1} \Gamma_T$$

$$\delta f_u^a = -M^{-1} \Gamma_u$$

$$\delta f_E^a = -M^{-1} \Gamma_E \quad .$$

Estos valores de δf^a se utilizan para calcular los coeficientes de transporte. Para ello, se usan las definiciones de los flujos que intervienen en las ecuaciones hidrodinámicas en el caso unidimensional

$$n_{\alpha} v_{\alpha} = \Gamma_{N\alpha} = \int \delta f^a v_z dp^3$$

$$\Gamma_{|p_3|} = \int \delta f^a v_z |m v_z| dp^3$$

$$q = \Gamma_T = \int \delta f^a v_z \left(m \frac{v^2}{2} \right) dp^3 \quad .$$

Aquí se ha usado \vec{v} en lugar de \vec{w} ya que $\beta_0 = 0$.

Estas integrales también fueron calculadas numéricamente como

$$\Gamma_{N\alpha} = \sum_i \delta f_i^a w_{\alpha i} v_z$$

donde $w_{\alpha i}$ es el peso de integración sobre β y μ

y el índice i se refiere a cada intervalo en β y μ , de la misma manera que se hizo para calcular las integrales en los términos de colisiones, pero aquí el peso $w_{\alpha i}$ es nulo para las componentes de δf^a

correspondientes a especies diferentes de la α . En cambio, en el caso de los otros flujos, es por ejemplo

$$J_T = \sum_i \delta f_i^\alpha w_i v_i \left(m \frac{v^2}{2} \right)$$

pero aquí los pesos que corresponden a todas las especies son diferentes de cero.

Estas operaciones de integración, se pueden expresar simbólicamente como productos escalares entre los vectores δf^α y V ,

$$J_{N_\alpha} = V_{N_\alpha} \cdot \delta f^\alpha$$

$$J_{|P_\beta|} = V_{|P_\beta|} \cdot \delta f^\alpha$$

$$J_T = V_T \cdot \delta f^\alpha$$

siendo

$$V_{N_\alpha i} = w_{\alpha i}$$

$$V_{|P_\beta| i} = (mc) \beta_i^2 \mu_i | \mu_i | w_i$$

$$V_{T i} = (mc^2) \frac{\beta_i^3}{2} \mu_i w_i$$

De aquí, genericamente, será el flujo de la cantidad a

$$J_a = - (V_a \cdot M^{-1} \cdot \Gamma_b) Z_b$$

siendo Z_b la fuerza termodinámica que induce el flujo. A través de esta expresión quedarían definidos los coeficientes de transporte Ω de manera que, si varias fuerzas termodinámicas actúan simultáneamente,

$$J_a = \sum_b \Omega_{ab} Z_b$$

$$\Omega_{ab} = - (V_a \cdot M^{-1} \cdot \Gamma_b)$$

y si actúan varias fuerzas termodinámicas simultáneamente

$$J_a = \sum_b \Omega_{ab} Z_b$$

Estos coeficientes Ω_{ab} son directamente calculados en el método numérico por su definición, y contienen toda la información respecto a los fenómenos de transporte en esta aproximación.

3.6 Coeficientes de transporte

En el caso actual, los flujos independientes son cinco: $J_{N\alpha}$ (para electrones, iones y átomos), J_{ip3} y J_T , y las fuerzas termodinámicas son seis, los gradientes de p , μ , T , W y T_R , o sea que resultan treinta coeficientes. Para la etapa del cálculo, se mantuvieron como fuerzas los gradientes $\frac{d \ln n_\alpha}{dz}$, pero ellos se expresan en términos de las apropiadas fuerzas termodinámicas, pues esos gradientes son función de p , T , μ , W y T_R a través de las fórmulas que definen los n_α .

Usando las fórmulas anteriores, es

$$\frac{d \ln}{dz} \left[b_1 \left(\frac{n_a}{n_e n_p} \right)^* \right] = \frac{d \ln}{dz} \left(\frac{n_a}{n_e} \right) = -\frac{1}{2} \frac{d \ln T}{dz} - \frac{d \ln W}{dz} - (1+x_R) \frac{d \ln T_R}{dz}$$

con

$$x_R = \frac{h \nu_0}{k T_R};$$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{p}{kT} \right) = 2 \frac{d n_e}{dz} + \frac{d n_a}{dz} = 2 n_e \left[\frac{d \ln n_e}{dz} + \left(\frac{n_a}{2 n_e} \right) \frac{d \ln n_a}{dz} \right]$$

Resultan

$$\frac{d \ln n_e}{dz} = \frac{d \ln n_p}{dz} = \frac{d \ln p}{dz} + \left(\frac{n_a}{2 n_e} - 1 \right) \frac{d \ln T}{dz} + \frac{n_a}{n_e} \left[\frac{d \ln W}{dz} + (1+x_R) \frac{d \ln T_R}{dz} \right]$$

$$\frac{d \ln n_a}{dz} = \frac{d \ln p}{dz} - \left(\frac{n_e}{n} + 1 \right) \frac{d \ln T}{dz} - \frac{2 n_e}{n} \left[\frac{d \ln W}{dz} + (1+x_R) \frac{d \ln T_R}{dz} \right]$$

siendo $n = n_e + n_p + n_a$;

por lo tanto los coeficientes de transporte apropiados están dados por

$$\Omega'_{*p} = \Omega_{*Ne} + \Omega_{*Np} + \Omega_{*Na} = \Omega_{*N}$$

$$\Omega'_{*T} = \Omega_{*T} + \left(\frac{m_a}{2m} - 1\right)(\Omega_{*Ne} + \Omega_{*Np}) - \left(1 + \frac{m_e}{m}\right)\Omega_{*Na}$$

$$\Omega'_{*W} = \Omega_{*W} + \left(\frac{m_a}{m}\right)(\Omega_{*Ne} + \Omega_{*Np}) - \left(\frac{2m_e}{m}\right)\Omega_{*Na}$$

$$\Omega'_{*T_R} = \Omega_{*T_R} + (1 + \chi_R) \left[\left(\frac{m_a}{m}\right)(\Omega_{*Ne} + \Omega_{*Np}) - \left(\frac{2m_e}{m}\right)\Omega_{*Na} \right]$$

$$\Omega'_{*u} = \Omega_{*u}$$

$$\Omega'_{*E} = \Omega_{*E}$$

• bien , definiendo

$$\Omega_{*i} = \left(\frac{m_a}{m}\right)(\Omega_{*Ne} + \Omega_{*Np}) - \left(\frac{2m_e}{m}\right)\Omega_{*Na}$$

por las fórmulas mas compactas

$$\Omega'_{*T} = (\Omega_{*T} - \Omega_{*N}) + \frac{1}{2} \Omega_{*i}$$

$$\Omega'_{*W} = \Omega_{*W} + \Omega_{*i}$$

$$\Omega'_{*TR} = \Omega_{*TR} + (1 + \chi_R) \Omega_{*i}$$

Estos coeficientes Ω , Ω' , no son los usuales , y no pueden compararse directamente con los valores dados por el libro CHC , o los trabajos de Spitzer , Braginskii o Devoto , (coeficientes de transporte usuales). Estos últimos , definidos por el método CHE , corresponden al flujo de una cantidad , pero anulando los demás flujos y básicamente sus definiciones están ligadas a la conservación de las partículas , el impulso y la energía en las colisiones , que ese método supone y en el caso presente no se cumplen . En cualquier caso , los coeficientes usuales pueden también definirse en el caso presente aunque no son un conjunto completo , ni retienen todas las propiedades que tienen en el caso del método CHE .

En cambio , el conjunto mas apropiado de coeficientes de transporte es el Ω' , a partir del cual , en la aproximación presente , se pueden calcular todos los flujos que intervienen en las ecuaciones hidrodinámicas (f 14) y de equilibrio estadístico (f 4) . Estas ecuaciones debe recordarse , relacionan cantidades de primer orden , mientras que las de equilibrio estadístico relacionan cantidades de orden cero .

En las tablas V y VI se dan los valores calculados de los coeficientes Ω y Ω' (en unidades cgs) .

Los valores de esas tablas no son todos independientes y , como se verá mas adelante , están vinculados por relaciones equivalentes a las de Onsager .

Para comparar los coeficientes de transporte calculados por mí con otros cálculos , debe suponerse al gradiente de ionización como una fuerza termodinámica independiente (Z_i) aunque , reitero , no lo es para el caso presente . De acuerdo a esto , se han dado en la tabla VII los valores de los coeficientes Ω_{*i} que corresponderían a

$$Z_i = \frac{d \ln \left(\frac{n_e}{n_a} \right)}{dz}$$

como puede deducirse de la expresión que incluye sólo gradientes de densidad

$$J_* = \Omega_{*Ne} Z_{Ne} + \Omega_{*Np} Z_{Np} + \Omega_{*Na} Z_{Na}$$

considerando que

$$\frac{d\ln n_p}{dz} = \frac{d\ln n_e}{dz}, \quad \frac{d\ln n_e}{dz} = \frac{d\ln n}{dz} + \frac{d\ln(n_e/n)}{dz} \quad y \quad \frac{d\ln n_a}{dz} = \frac{d\ln n}{dz} + \frac{d\ln(n_a/n)}{dz}.$$

El conjunto (Z_N, Z_i) reemplazaría entonces al (Z_{Ne}, Z_{Np}, Z_{Na}) en las fuerzas.

En la tabla VIII se muestra un listado completo de todos los conjuntos de fuerzas termodinámicas y flujos considerados.

A continuación, daré las expresiones de los coeficientes de transporte usuales, en términos de los Ω :

1) Relacionados con la difusión relativa entre electrones y protones, o sea vinculados con la corriente eléctrica. Se obtienen expresando la corriente eléctrica j_e como

$$j_e = e n_e (v_p - v_e) = e (J_{Np} - J_{Ne}) = -e J_{el}$$

siendo

$$J_{el} = \sum_b \Omega_{elb} Z_b$$

De aquí es inmediata la definición de la conductividad eléctrica σ_{el} que es el coeficiente del campo eléctrico en la expresión de la corriente eléctrica

$$\sigma_{el} = -\Omega_{el} E$$

Esta conductividad es la que corresponde a aplicar un campo eléctrico constante en el tiempo, o sea para la llamada corriente continua (d.c.).

A partir de la expresión de \mathcal{T}_{el} , también se obtienen otros coeficientes, que suelen expresarse a partir del campo eléctrico necesario para equilibrar su efecto, ya que se supone que, rápidamente, la carga eléctrica acumulada por la corriente produce un campo eléctrico que neutraliza la fuerza termodinámica aplicada por acción externa. Coherentemente con esto se definen los coeficientes.

$$\text{isoelectrónico} \quad \ell = - \frac{\Omega_{el} di}{\Omega_{el} E}$$

$$\text{termoelectrónico} \quad \mathcal{R} = - \frac{(\Omega_{el} T - \Omega_{el} N)}{\Omega_{el} E}$$

$$\text{fotoelectrónico } W \quad \mathcal{R}_W = - \frac{\Omega_{el} W}{\Omega_{el} E}$$

$$\text{fotoelectrónico } R \quad \mathcal{R}_R = - \frac{\Omega_{el} T_R}{\Omega_{el} E}$$

Los coeficientes fotoeléctricos y el termoelectrónico mencionados no se adaptan al caso presente, pero se los presenta por ser comparables a los valores calculados por Spitzer, y corresponden a suponer la composición como variable independiente. Los valores adecuados en nuestro caso son

$$\mathcal{R}' = - \frac{\Omega'_{el} T}{\Omega'_{el} E} = \mathcal{R} + \frac{\ell}{2}$$

$$\mathcal{R}'_W = - \frac{\Omega'_{el} W}{\Omega'_{el} E} = \mathcal{R}_W + \ell$$

$$r'_R = - \frac{\Omega'_{elTR}}{\Omega'_{elE}} = r_R + (1 + r_R) l$$

Resulta entonces

$$j_e = \sigma e \left(E^* - l \frac{d \ln \left(\frac{m_e}{m_a} \right)}{dz} - r \frac{d \ln T}{dz} - r_W \frac{d \ln W}{dz} - r_R \frac{d \ln T_R}{dz} \right)$$

• bien

$$j_e = \sigma e \left(E^* - r' \frac{d \ln T}{dz} - r'_W \frac{d \ln W}{dz} - r'_R \frac{d \ln T_R}{dz} \right)$$

Las definiciones usadas corresponden a las usuales de Spitzer, excepto por los coeficientes fotoeléctricos que en esos trabajos no se consideran.

2) Coeficientes relacionados con la velocidad de difusión del centro de masa entre electrones y protones con respecto a los átomos, llamados de difusión ambipolar (pues implican movimiento conjunto de ambas polaridades).

Se expresan en función de la diferencia entre las velocidades de difusión

$$v_{Amb} = v_{pe} - v_a = \frac{1}{m_e} \left(\frac{\gamma_{Ne}}{1 + \frac{m_p}{m_e}} + \frac{\gamma_{Np}}{1 + \frac{m_e}{m_p}} \right) - \frac{1}{m_a} \gamma_{Na}$$

siendo v_{pe} la velocidad de difusión

$$v_{pe} = \frac{m_e v_e + m_p v_p}{m_e + m_p} = \frac{\gamma v_e + v_p}{\gamma + 1}$$

$$\gamma = \frac{m_e}{m_p} .$$

Estos coeficientes suelen definirse de manera de eliminar el campo eléctrico de la expresión de v_{Amb} , lo cual se logra definiéndolos a partir de la anulación de la corriente eléctrica.

Es decir, que de la fórmula para la corriente eléctrica, puede despejarse el campo eléctrico autoconsistente E_a^* que se produciría cuando la corriente eléctrica (que aparecería debido a las demás fuerzas.) produzca una acumulación de carga eléctrica tal que se anule esa corriente.

El valor de E_a^* se calcula a partir de los ℓ , r , r_w , r_R , resultando una fórmula para la difusión ambipolar que no contiene el campo eléctrico.

Las definiciones de los coeficientes eléctricos y ambipolares son apropiadas para nuestro caso pues las colisiones con que tratamos conservan la carga eléctrica y la masa.

Por la condición de anularse J_{el} , es $v_e = v_p$ y queda

$$v_{Amb} = v_p - v_a = v_e - v_a.$$

Usando el formalismo de CHC para la difusión de pares de iones (despreciando los electrones) es (ver (g19) a (g22))

$$D_{pa} = \frac{n_e n_a}{n^2} \left[\frac{d \ln \left(\frac{n_e}{n_a} \right)}{dz} - \frac{e^2 E_a^*}{kT} \right]$$

y siendo D_{pa} el coeficiente de difusión mutua,

$$v_{Amb} = - \left[\frac{D_{pa}}{n^2} \frac{d \ln \left(\frac{n_e}{n_a} \right)}{dz} + \frac{e^2 E_a^* D_{pa}}{p n} + \frac{D_{pa}^T}{n_e n_a} \frac{d \ln T}{dz} \right]$$

donde E_a^* se escribe en función de las demás fuerzas, y no se han considerado las fuerzas debidas a la radiación. Estas últimas, por lo que se dijo, deben expresarse en forma similar a la fuerza térmica.

Sin embargo, en un análisis que considere la existencia de los electrones, debe usarse el planteo de Devete (g23 a g26); de acuerdo a este, se ve que la velocidad v_{Amb} , corresponde con la velocidad de difusión de átomos por los pares electrón-protón de acuerdo a la fórmula (g23),

$$v_{Amb} \equiv - \frac{p}{n_e (m_e + m_p)} v_a'$$

y las fuerzas d_α resultan según (824)

$$d_a = - \frac{n_e n_a}{n^2} \nabla \ln \left(\frac{n_e}{n_a} \right) - \frac{n_e p_a}{n p} \nabla \ln p$$

$$d_p = \frac{n_e n_a}{n^2} \nabla \ln \left(\frac{n_e}{n_a} \right) - \frac{n_e p_p}{n p} \nabla \ln p - \frac{n_e}{n} \frac{e^2 E_a^*}{kT}$$

$$d_e = \frac{n_e n_a}{n^2} \nabla \ln \left(\frac{n_e}{n_a} \right) + \frac{n_e}{n} \nabla \ln p + \frac{n_e}{n} \frac{e^2 E_a^*}{kT}$$

siendo

$$\gamma = \frac{m_e}{m_p} \ll 1$$

A partir de las (825) puede entonces obtenerse una expresión para \bar{v}_{Amb} en la que aparecerán combinaciones de los coeficientes de difusión mutua multiplicando a las fuerzas.

En nuestro caso, todas estas relaciones resultan modificadas e innecesarias, en su lugar obtenemos una expresión

$$\bar{v}_{Amb} = - \left[\frac{D_A}{n^2} \frac{d \ln \left(\frac{n_e}{n_a} \right)}{dz} + \frac{D_A^T}{n_e n_a} \frac{d \ln T}{dz} + \frac{D_A^W}{n_e n_a} \frac{d \ln W}{dz} + \frac{D_A^R}{n_e n_a} \frac{d \ln T_R}{dz} \right]$$

donde ya fué sustituido el campo eléctrico autoconsistente y que define los coeficientes de difusión

ambipolar

$$D_A = n^2 \left(\Omega_{Ai} - \frac{\Omega_{eli}}{\Omega_{elE}} \Omega_{AE} \right)$$

termoambipolar

$$D_A^T = n_e n_a \left[(\Omega_{AT} - \Omega_{AN}) - \frac{(\Omega_{elT} - \Omega_{elN})}{\Omega_{elE}} \Omega_{AE} \right]$$

fotambipolar W

$$D_A^W = n_e n_a \left(\Omega_{AW} - \frac{\Omega_{elW}}{\Omega_{elE}} \Omega_{AE} \right)$$

foteambipolar R

$$D_A^R = n_e n_a \left(\Omega_{ATR} - \frac{\Omega_{elTR}}{\Omega_{elE}} \Omega_{AE} \right)$$

siendo definidos los

$$\Omega_{A*} = \left(\frac{\Omega_{Na*}}{n_a} - \frac{\Omega_{NP*} + \gamma \Omega_{Ne*}}{(1+\gamma) n_e} \right)$$

En el caso actual en que Z_i no es una fuerza termodinámica, es

$$v_{Amb} = \frac{-1}{n_e n_a} \left[D_A^{T'} \frac{d \ln T}{dz} + D_A^{W'} \frac{d \ln W}{dz} + D_A^{R'} \frac{d \ln T_R}{dz} \right]$$

con los $D_A^{*'}$ dados por las mismas expresiones anteriores pero con los Ω' , salvo

$$D_A^{T'} = n_e n_a \left(\Omega'_{AT} - \frac{\Omega'_{elT}}{\Omega'_{elE}} \Omega'_{AE} \right)$$

Estas son las expresiones apropiadas para el caso que analizamos.

3) Los coeficientes de viscosidad relacionados con el tensor $\bar{\xi}$ de las ecuaciones hidrodinámicas o sea con el flujo de impulso.

La definición de los coeficientes correspondientes al η de las ecuaciones (917) es difícil ya que en el caso unidimensional el único posible de éstos flujos es el de P_z y éste es nulo en la primera aproximación por ser $\delta f_0^s = 0$.

Se han calculado en cambio los coeficientes para el flujo $\mathcal{P}_{|P_z|}$, que están vinculados con la viscosidad volumétrica ω de la fórmula (918) y no implican un flujo de impulso sino una perturbación en la presión respecto a $P_0 = n k T$.

No se define usualmente mas que el coeficiente de viscosidad volumétrica

$$\omega = \frac{\Omega_{|P_z|} \mu}{c}$$

aunque, por supuesto los demás coeficientes no son nulos.

4) Coeficientes vinculados con el flujo de calor q de las ecuaciones hidrodinámicas.

Se expresan relacionando el valor del flujo de calor cuando las velocidades de difusión de todas las partículas se anulan. Este correspondería a pensar que, al aparecer un gradiente de temperatura, la corriente eléctrica J_{el} que este produce, acumula una carga eléctrica y por lo tanto produce un campo eléctrico que anula esa corriente; además el flujo ambipolar J_{Amb} produce un gradiente de concentraciones que lo anula.

En estas condiciones se define la conductividad térmica λ usualmente por $q = -\lambda \nabla T$, al que deben agregarse los términos isotérmicos

$$-\lambda_W \nabla \ln W \quad - \lambda_R \nabla T_R.$$

La conductividad térmica λ puede expresarse en función de los Ω . Por la linealidad de todas las expresiones resulta, en una situación general, el flujo de calor

$$q = \frac{5}{2} kT \sum_{\alpha} n_{\alpha} v_{\alpha} - \lambda \nabla T$$

ya que $\frac{5}{2} kT$ es la entalpía de cada una de las especies. De aquí Devoto obtiene expresiones para los coeficientes λ y λ' definidos en (§ 26).

En el caso presente, sin embargo conviene seguir un razonamiento más directo ya que se cuenta con los coeficientes de las expresiones

$$q = \sum_b \Omega_{Tb} Z_b$$

$$n_{\alpha} v_{\alpha} = \sum_b \Omega_{N\alpha b} Z_b.$$

Llamando

$$\Omega_{N*} = \sum_{\alpha} \Omega_{N\alpha*}$$

$$\lambda \nabla T = \frac{5}{2} \beta T \sum_b \Omega_{Nb} Z_b - \sum_b \Omega_{Tb} Z_b$$

de donde, suponiendo nulas las fuerzas de la radiación

$$\lambda \nabla T = \frac{5}{2} \beta T [\Omega_{Ni} Z_i + \Omega_{NE} Z_E + (\Omega_{NT} - \Omega_{NN}) \nabla \ln T] -$$

$$- [\Omega_{Ti} Z_i + \Omega_{TE} Z_E + (\Omega_{TT} - \Omega_{TN}) \nabla \ln T]$$

y, en consecuencia,

$$T\lambda = \left(\frac{5}{2} \beta T \Omega_{Ni} - \Omega_{Ti} \right) \frac{Z_i}{Z_T} + \left(\frac{5}{2} \beta T \Omega_{NE} - \Omega_{TE} \right) \frac{Z_E}{Z_T} +$$

$$+ \left[\frac{5}{2} \beta T (\Omega_{NT} - \Omega_{NN}) - (\Omega_{TT} - \Omega_{TN}) \right] .$$

De la anulación del flujo ambipolar y la corriente eléctrica se pueden despejar los (Z_i/Z_T) y (Z_E/Z_T) , siendo en estas condiciones

$$0 = \Omega_{eli} Z_i + \Omega_{elE} Z_E + (\Omega_{elT} - \Omega_{elN}) Z_T$$

$$0 = \Omega_{Ai} Z_i + \Omega_{AE} Z_E + (\Omega_{AT} - \Omega_{AN}) Z_T .$$

Luego

$$-\left(\frac{Z_E}{Z_T}\right) = \frac{\Omega_{eli}(\Omega_{AT} - \Omega_{AN}) - \Omega_{Ai}(\Omega_{elT} - \Omega_{elN})}{\Omega_{eli} \Omega_{AE} - \Omega_{elE} \Omega_{Ai}}$$

$$-\left(\frac{Z_i}{Z_T}\right) = \frac{(\Omega_{elT} - \Omega_{elN}) \Omega_{AE} - (\Omega_{AT} - \Omega_{AN}) \Omega_{elE}}{\Omega_{eli} \Omega_{AE} - \Omega_{elE} \Omega_{Ai}}$$

que se pueden reemplazar en la expresión para $T \lambda$.

$$T \lambda = \left[\frac{5}{2} k T (\Omega_{NT} - \Omega_{NN}) - (\Omega_{TT} - \Omega_{TN}) \right] + \\ + \left(\frac{Z_E}{Z_T} \right) \left(\frac{5}{2} \beta T \Omega_{Ni} - \Omega_{Ti} \right) + \left(\frac{Z_i}{Z_T} \right) \left(\frac{5}{2} \beta T \Omega_{Ni} - \Omega_{Ti} \right).$$

Análogamente se pueden definir los coeficientes fototérmicos λ_W y λ_R reemplazando en los subíndices T por W y T_R respectivamente, y lo mismo en las fórmulas de $\left(\frac{Z_E}{Z_T} \right)$ y $\left(\frac{Z_i}{Z_T} \right)$.

Resulta entonces la fórmula para la situación de equilibrio

$$q = \frac{5}{2} p v_N - \lambda \nabla T - \lambda_W \nabla \ln W - \lambda_R \nabla T_R$$

siendo $v_N = \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{m} v_{\alpha}$ la velocidad promedio de las partículas respecto de la velocidad media $v_m = \sum_{\alpha} \frac{p_{\alpha}}{p} v_{\alpha}$.

Esta fórmula es análoga a la usual, pero en el caso actual en que Z_i no es una fuerza termodinámica carece de sentido físico. En cambio deben adaptarse las expresiones de Ω' en función de las cuales se temaría el campo eléctrico autoconsistente definido por la anulación de la corriente eléctrica, pero ya no se puede imponer condiciones sobre el flujo ambipolar.

En estas condiciones sería

$$-\left(\frac{Z_E}{Z_T} \right) = \frac{\Omega'_{eT}}{\Omega'_{eE}}$$

y

$$T \lambda' = \left(\frac{5}{2} \beta T \Omega'_{NE} - \Omega'_{TE} \right) \left(\frac{Z_E}{Z_T} \right) + \left(\frac{5}{2} \beta T \Omega'_{NT} - \Omega'_{TT} \right)$$

y las fórmulas análogas para λ'_W y λ'_R .

En los casos 1) , 2) y 4) existen valores de Ω_{*u} que no fueron considerados. Ello se debe a que, como se manifestó en el punto 3) , el gradiente de velocidad sólo produciría una perturbación en la presión , y por éste los coeficientes correspondientes pueden ser absorbidos dentro del gradiente de presión. Como por definición la perturbación es pequeña , no implicaría correcciones importantes a los coeficientes ni fórmulas.

Por otra parte , el conjunto de coeficientes presentado de 1) a 4) es un conjunto independiente en el sentido de que esos coeficientes no están relacionados por ecuaciones básicas de conservación que relacionan a muchos de los Ω y Ω' , un ejemplo de las cuales es la (210) en el caso mas simple de un gas completamente ionizado.

Otra consideración importante es que aunque se mencionó que los coeficientes calculados corresponden al balance estadístico (es decir , la ionización y por lo tanto la Z_i están en función de los otros parámetros termodinámicos) , la teoría aquí expuesta también se aplicaría aún cuando la ionización no estuviera en equilibrio y hubiera variaciones importantes en el tiempo. En cuyo caso deberían usarse los coeficientes sin primar y éste introduciría otra dimensión a nuestra grilla de valores de parámetros termodinámicos ; respecto a los coeficientes no primados para el flujo de calor λ_{*} , no debería reclamarse la anulación del flujo ambipolar y deberían calcularse en forma análoga a los λ'_{*} .

Los coeficientes de transporte usuales , se han definido para $\frac{d \ln p}{dz} = 0$ y velocidad media $v_m = 0$, y se observa que existen coeficientes Ω_{*p} que producirían flujos , sin embargo , la correspondiente Z_p para el estado de equilibrio está fijada por la ecuación de conservación del impulso , la primera de las (f14) en casos estacionarios , siendo en el caso actual

$$Z_p = \frac{\nabla p}{p} = \frac{p_{\uparrow}}{p}$$

que , usando las (f7) y la segunda de las (a25) se puede llevar a

$$Z_p = \frac{4\pi}{p c} \int \kappa_v^s h_v \mu dp dv \quad .$$

De (a 28) y (a 23) siendo $\chi_V^S = K_V^S$, resulta

$$Z_p = -\frac{4\pi}{pc} \int \frac{2kV^3}{c^2} \frac{dF_V}{dz} \mu^2 d\mu dv = -\frac{4\pi}{3pc} \int \frac{2kV^3}{c^2} \frac{dF_V}{dz} dv = -\frac{4\pi}{pc} \int \frac{dK_V}{dz} dv$$

que puede expresarse en función de $\frac{dW}{dz}$ y $\frac{dT_R}{dz}$. Por lo tanto, el definir los coeficientes de transporte en estado estacionario sólo altera los coeficientes radiativos respecto al caso en que se definen los coeficientes de transporte a presión constante.

Otra forma más usual de presentar la condición de equilibrio hidrostático es la de suponer constante la expresión $(P + P_R)$ donde P_R es la llamada presión de radiación, que de acuerdo a la fórmula presentada es

$$P_R = \frac{4\pi}{c} \int K_V dv = \frac{4\pi}{3c} \int W B_V(T_R) dv \propto \frac{4\pi}{3c} W \cdot T_R^4 \frac{\pi^4 B^4}{10c^2 h^3}$$

$$P_R = \frac{S}{c} W T_R^4$$

donde S es la constante de Stefan-Boltzmann.

3.7 Unidades

Todas las cantidades están expresadas en el sistema cgs de unidades a excepción del campo eléctrico que está dividido por la carga del protón y por ello, los coeficientes Ω y Ω' están expresados en términos de E^* , aunque se suprime el asterisco.

Entre los flujos que se definen, se consideran los difusivos J_{N_α} en $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ a partir de los cuales se definen las velocidades de difusión, $v_\alpha = \frac{J_{N_\alpha}}{n_\alpha}$, y se incluye el flujo difusivo de fotones dividido por la velocidad de la luz J_{N_γ} . El flujo de partículas total es J_N , a partir del cual se define la velocidad promedio.

Otros flujos considerados son el de $|P_3|$, llamado $J_{|P_3|}$,

en $\text{gr cm}^{-1} \text{s}^{-2}$, el de energía cinética de las partículas (energía térmica) $\mathcal{J}_T \equiv q$, en $\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1}$; el de carga eléctrica \mathcal{J}_{el} que está expresado en función de la carga del electrón ($-e$) y se da en $\text{electrones cm}^{-2} \text{s}^{-1}$: el de energía interna \mathcal{J}_E , en $\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1}$, en el cual se asumió que los átomos tienen una energía igual a la energía de ionización con signo negativo, y el flujo de energía radiativa (integrado sobre la frecuencia) \mathcal{J}_R , en $\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1}$, a partir de éste se puede definir la temperatura efectiva T_{ef} tal que $\mathcal{J}_R = S T_{ef}^4$ (con S la cte de Stefan-Boltzmann).

Los flujos relacionados con la radiación han sido calculados de la misma manera que los de las partículas, y por lo tanto representan la solución a las ecuaciones de transporte radiativo en las condiciones dadas. Estas ecuaciones incluyen los términos con χ^a y n^a que provienen de las \mathcal{J}^a de las partículas.

De aquí que el mayor problema de unidades se presenta para pasar la conductividad eléctrica al sistema mks que resulta

$$\sigma(\text{mks}) = (4\pi\epsilon_0) \sigma(\text{cgs}) \times 10^{-2}$$

donde ϵ_0 es la permitividad dieléctrica del vacío

$$(4\pi\epsilon_0)^{-1} = 8.9874 \times 10^9$$

Los mismos factores deben usarse para convertir el campo eléctrico del sistema cgs al mks, en general.

3.8 Límites de validez

En la Tabla IX se muestran los valores máximos que corresponden a las fuerzas termodinámicas respecto de las diferentes especies α . Estos valores corresponden a aquellas fuerzas para las cuales el cálculo de $|\delta f_\alpha^q(\nu=0.8873)|$ iguala el valor de F_α para una velocidad tal que $\chi \sim 1$.

Estos valores , por lo tanto representarían límites absolutos para la validez de las definiciones de los coeficientes , ya que a partir de ellos , una cantidad muy grande de partículas integrarían la "componente no térmica" y toda la filosofía de los fenómenos de transporte involucrada carecería de validez.

También se listan en la Tabla X los valores para los cuales , el efecto de saturación de los flujos comenzaría a ser de importancia , llamados valores críticos , y que se tomaron de manera que la condición similar a la anterior se produzca para $\chi = 3$. Para valores de las fuerzas termodinámicas mayores que los críticos , los coeficientes podrían definirse pero dejarían de ser independientes de las fuerzas termodinámicas y aún podrían depender de características del fluido no locales .

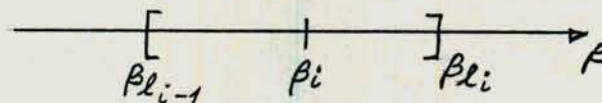
Y para valores de las fuerzas termodinámicas mayores que los máximos , los flujos dejarían de estar ligados a características locales y solamente pueden calcularse por un análisis global, como resolver las ecuaciones de transporte correspondientes con sus condiciones de contorno.

Tanto el valor crítico como el máximo se han listado independientemente para cada especie , pero en general deben tenerse en cuenta los valores mínimos. La consideración de los extremos , sin embargo , puede adecuarse al problema de que se trate , ya que por ejemplo para la corriente eléctrica sólo son importantes las partículas cargadas y especialmente los electrones , de manera que si se considera un caso de ionización no demasiado baja , se puede suponer que los átomos de la "componente no térmica" no tendrán gran influencia en los coeficientes y bastará con tomar los valores extremos para los electrones. Consideraciones similares pueden aplicarse al flujo de calor para grandes ionizaciones , pero no puede darse un criterio general , y cada problema debe analizarse en detalle.

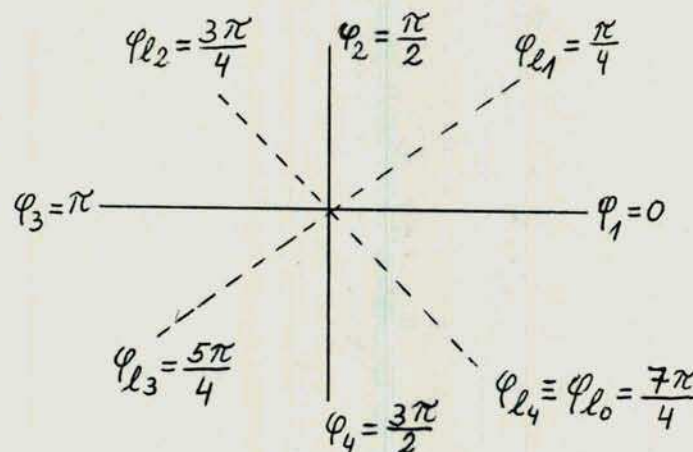
CAPITULO IV
CALCULOS

Cálculos4.1 Particiones

Las particiones en β , μ y φ , se efectuarán en 8, 3 y 4 intervalos respectivamente. Para cada intervalo en β , se toma un valor central, un límite inferior y un límite superior de acuerdo al siguiente gráfico, tratando de cubrir con cierto detalle la región para la cual $x \lesssim 1$.



Los valores de $\beta_{l,0} = 0$ y $\beta_{l,3} = \infty$ se adoptan para cubrir todos los valores de β . Análogamente $\mu_{l,0} = 0$ y $\mu_{l,3} = 1$ para el caso de μ . Para el caso de φ , en cambio se eligieron los valores de los intervalos de acuerdo al gráfico.



Los valores adoptados para las particiones son los finales, y se hicieron ensayos con otros valores y cantidad de intervalos, llegándose a la conclusión de que con éstos se obtienen resultados confiables.

No es posible por la computadora con que se trabaja utilizar particiones en mayor cantidad de intervalos debido a que ello incrementaría demasiado el tiempo de cálculo, pero además con las cantidades adoptadas, los resultados que se obtienen para los casos estudiados por otros métodos son suficientemente aproximados.

Para los fotones se adoptó una partición para los valores de (v/v_0) , donde v_0 es la frecuencia de ionización, con características similares

a las de β , tratando de cubrir especialmente la región con ($v/v_0 \gtrsim 1$).

Las integraciones fueron efectuadas, de acuerdo a la fórmula numérica

$$I = \sum_{i=1, n} g_i w_i$$
 donde g_i son los valores de la función para el centro del intervalo y w_i los correspondientes pesos de integración.

Para las integrales respecto de φ se tomaron los pesos iguales a $\frac{1}{n\varphi}$.

En cambio para las integrales sobre ν se utilizaron los valores que se dan en la Tabla XII y que corresponden a los habitualmente usados en los métodos de transporte radiativo. El factor de integración 4π restante se absorbe en las definiciones de F . En cambio para las integrales sobre $d\rho^3$ se utiliza la suposición de que las funciones a integrar f , pueden descomponerse en una parte que varía lentamente g y otra de la forma de F . De acuerdo a éste, es

$$I = \sum_{i=1, n\beta} \int_{\beta_{i-1}}^{\beta_i} f d\rho^3 = \sum_i g_i \int_{\beta_{i-1}}^{\beta_i} F d\rho^3 = \sum_i f_i w_i$$

definiendo el peso

$$w_i = F_i^{-1} \int_{\beta_{i-1}}^{\beta_i} F d\rho^3$$

Estas fórmulas pueden utilizarse tanto para las partículas como para los fotones, y en éste último caso, debe reemplazarse β por (v/v_0).

Para las partículas, es $F \propto e^{-x^2}$ y $d\rho^3 = (mc)^3 \beta^2 d\beta$, de lo cual resulta

$$d\rho^3 = (2m kT)^{3/2} x^2 dx$$

y

$$w_i = (2m kT)^{3/2} e^{x_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-x^2} x^2 dx$$

Luego de una integración por partes, obtenemos

$$w_i = \frac{(2m kT)^{3/2}}{2} \left[\int_{x_{li-1}}^{x_{li}} e^{-x^2} dx - (x_{li} e^{-x_{li}^2} - x_{li-1} e^{-x_{li-1}^2}) \right] e^{x_i^2}$$

Y utilizando la definición de la función error como se tabula habitualmente (Abramowitz y Stegun , 1972)

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

pueden calcularse los pesos de integración. El factor constante puede eliminarse absorbiéndolo en la normalización de la función de distribución que forma parte del integrando.

En realidad , se definieron los valores de x_i , x_{li} y la partición se efectuó en términos de x para todas las partículas , luego, a partir de los valores de masa para cada partícula y temperatura para cada caso , se calcularon los valores de β_i y β_{li} correspondientes.

Los valores de x fueron elegidos de manera de cubrir adecuadamente el rango de interés para los coeficientes de transporte , o sea de $x=1$ a $x=3$.

Los valores correspondientes a la partición finalmente adoptada se listan también en la Tabla XII.

Otra posibilidad que fué ensayada es el uso de una partición Hermitiana según el libro de Abramowitz y Stegun (1972) pero ésta, no concreta los puntos en la región de interés lo suficiente , y si bien dió resultados aproximados , no fueron tan buenos como con la partición elegida.

Para la radiación se toma

$$F \propto w e^{-\frac{h\nu}{kT_R}}$$

$$d\rho_\nu^3 \equiv d\tau_\nu = 2 \frac{\nu^2}{c^3} d\nu$$

y se puede definir $\alpha = \frac{h\nu_0}{kT_R}$ y $x = \frac{\nu}{\nu_0}$, siendo ν_0 la frecuencia de ionización del hidrógeno. De ésta manera se tomaron los valores

de x para cubrir el continuo de Lyman como se muestran en la Tabla XII.

Usando esas definiciones, es

$$w_i = 2 \left(\frac{V_0}{c} \right)^3 e^{\alpha x_i} \int_{x_{li-1}}^{x_{li}} e^{-\alpha x} x^2 dx$$

que integrado por partes resulta

$$w_i = 2 \left(\frac{V_0}{c} \right)^3 e^{\alpha x_i} \left[\frac{(\alpha^2 x^2 + 2\alpha x + 2)}{\alpha^3} e^{-\alpha x} \right]_{x_{li}}^{x_{li-1}} .$$

El factor $2 \left(\frac{V_0}{c} \right)^3$ se absorbe en la definición de F , por lo cual, incluyendo los otros factores es

$$F_v = 8\pi \left(\frac{V_0}{c} \right)^3 W \frac{1}{e^{\alpha x} - 1} \approx 8\pi \left(\frac{V_0}{c} \right)^3 W e^{-\alpha x}$$

Los pesos de integración, dependen de T_R .

4.2 Comprobaciones

Una de las comprobaciones que se hizo entre el método presente y el de Spitzer y Harm pone en evidencia el correcto tratamiento de los términos de colisiones de la forma de Landau.

Comparando un caso tipo, de temperatura $T = 10^4$ °K y densidad electrónica $n_e = 3.62 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-3}$, se obtienen los valores de los coeficientes A y B definidos en los trabajos SH y CSR que resultarían

$$A = -5.54 \times 10^{-7} E^*$$

$$B = 6.63 \sqrt{\ln T}$$

De acuerdo a los trabajos citados, se define la perturbación en la función de distribución electrónica como proporcional a μ , en el trabajo presente, no se ha hecho esa suposición a priori, pero los valores resultantes de $(\delta f^e/\mu)$ difieren a lo sumo en 0.2 % en el caso de considerar sólo colisiones elásticas entre electrones y protones (aproximadamente un gas de Lorentz) y hasta un 10 % en el caso del plasma incluyendo todas las colisiones elásticas entre partículas cargadas

En el gráfico 1 se muestran los resultados comparativos para D_E obtenidos por SH para el caso de Lorentz y para un plasma, y los resultados del presente trabajo incluyendo sólo colisiones elásticas electrón-proton (ep), electrón-electrón (ee) y ambos casos (pl)

Se ve en éstos gráficos que en el caso pl, para velocidades alrededor o menores que la térmica, los valores obtenidos por SH coinciden con los dados por mi método, para valores mayores de velocidad, en cambio, ambas curvas se apartan hasta un 30 % pero vuelven a cruzarse a $x \simeq 3$. La diferencia más importante entre ambos casos es la inflexión en la curva que se obtuvo según mis cálculos y que contrasta con la tendencia monótona según los resultados de SH. Esta diferencia es debida al término de colisiones entre electrones como surge del mismo gráfico y puede

deberse a : la diferencia de las condiciones de contorno en ambos cálculos para altas velocidades , y al hecho de que en el trabajo SH no se consideró la variación del logaritmo coulombiano y se supuso la forma proporcional a ν (en mis cálculos , $(\int f^2/\nu)$ deja de ser constante para altas velocidades) , En contra de n mis cálculos , puede argumentarse la escasa cantidad de intervalos n_p . Probablemente las diferencias entre ambos resultados se deban a la conjunción de todos éstos factores .

La conductividad eléctrica según mis cálculos es de 1.03×10^{13} mientras que la obtenida per SH es de 1.45×10^{13} lo cual está dentro de los márgenes de error usualmente aceptadas en los cálculos astrofísicos

En la Tabla XIII se muestran los gráficos equivalentes a los casos anteriores pero para el caso de la función D_T . En esa tabla se ve la buena coincidencia entre los valores excepto en el último punto. El valor de conductividad térmica para SH es de 2.38×10^4 y según mis cálculos resulta 2.98×10^4 lo cual es una buena aproximación para uso en astrofísica .

Otra comparación que fué hecha es la de simular en los cálculos , un gas de electrones de los mismos parámetros que antes, que interactúan como esferas rígidas y por lo cual se tomó una sección eficaz en el sistema de laboratorio

$$\sigma = 2\nu a_0^2$$

siendo a_0 el radio de la primera órbita de Bohr. De acuerdo a las fórmulas de CHC , la conductividad eléctrica para un gas de estas características estaría dada por la fórmula y el valor

$$\lambda = \frac{75}{64d^2} \sqrt{\frac{k^3 T}{\pi m}} = 6.35 \times 10^7$$

siendo d^2 el diámetro molecular e sea en el caso presente $d = \sqrt{2} a_0$.

La prueba del método arrojó un valor para $\lambda = 8.03 \times 10^7$ que resulta bastante bueno desde el punto de vista que nos interesa

dad de la limitade de las particiones y las características de éste tipo de sección eficaz que da gran peso a todos los valores de β .

El código de computación desarrollado , consta de 1577 sentencias , y con excepción de las subrutinas para la resolución del sistema lineal fué integramente desarrollado por mí. Fué estructurado en forma de subrutinas separadas, ya que cada una de ellas fué probada individualmente con juegos de datos cubriendo todas las variantes. La estructura del programa es tal que permite su fácil modificación para casos relativistas , para gases mas complicados y particularmente , para continuar las iteraciones en el caso de usarse el método NR descripto .

En cualquiera de estos casos , sin embargo , los requerimientos de memoria y tiempo de CPU aumentan. En el estado actual la capacidad de memoria que se requiere para la carga del programa es de aproximadamente 2 M b y el tiempo de CPU oscila alrededor de los 110 minutos.

Un punto que debe mencionar es que si bien en un principio se ensayó un método de inversión (para la matriz M) por descomposición en dos matrices triangulares , luego debió desecharse por los inaceptables errores numéricos involucrados y por ello se empleó el mucho mas confiable (aunque mas lento) de solución del sistema lineal por triangularización gaussiana .

CAPITULO V
CONCLUSIONES

Conclusiones

El método que he desarrollado , permite calcular los apartamientos de la función de distribución respecto de la de Maxwell , para formas complicadas del término de colisiones y en modelos de gas adecuados a las condiciones usuales en astrofísica.

Las comparaciones hechas en el gráfico 1 muestran que si se tomara un gas compuesto sólo por electrones y protones ("plasma ideal") los cálculos de acuerdo al método que presento coinciden en forma prácticamente total con los resultados teóricos para un plasma de Lorentz, o sea para el caso hipotético en que las partículas de la misma especie no interactúan entre ellas (en el cálculo teórico se supone fijos a los protones). En cambio, si se compara con los cálculos de SH , el resultado de mis cálculos coincide para bajas velocidades ($\chi = \frac{v}{v_T} < 1$), pero a mayores velocidades está un poco por debajo hasta $\chi \approx 3$, y para velocidades aún mayores pasa por encima.

La diferencia entre las curvas de SH y la P (calculada por mi método) muestran el efecto de la condición de contorno a altas velocidades , y pone en evidencia como influyen en la perturbación δf los electrones de alta velocidad.

En la primera parte del gráfico 2 se efectúa la comparación , usando el modelo de gas compuesto solamente por una partícula , entre los δf obtenidos por mi método para diferentes tipos de interacción . En el caso FP se usó un término de colisiones del tipo de Fokker-Planck , como si se tratara de un gas de electrones . En el caso B se empleó un término de interacción Boltzmann con sección eficaz diferencial de esferas rígidas con medio radio de Bohr . Los gráficos 2a y 2b muestran la importante diferencia cualitativa entre los resultados correspondientes a ambos casos , que es la que obliga a usar altos órdenes en el desarrollo en serie de δf cuando se usa el término de colisiones de Fokker-Planck.

En la segunda parte del gráfico 2 se muestran los δf para un modelo de gas de electrones , protones y átomos a una temperatura de 10^4 °K , en ETL y con presión 100 dina/cm^2 . Se observa aquí el efecto de la radiación en los δf , ya que las curvas obtenidas cuando la radiación en el continuo de Lyman es despreciada (S) difieren notablemente de aquellas en las que ha sido considerada (ξ) .

Para ejemplificar esas diferencias , vemos en el gráfico 2 c la inclusión de la radiación afecta sobre todo a la función de distribución de los átomos incrementando la perturbación δf en un factor del orden de 10^4 para altas velocidades , y de $3 \cdot 10^3$ para bajas velocidades . La perturbación en el caso de los electrones resulta pequeña a baja velocidad y se incrementa hasta un factor cercano a 10 (para $x \approx 0.5$) cuando se considera la radiación . El gráfico 2c corresponde a la aplicación de un gradiente de densidad o presión , en el 2 d se ve que cuando se aplica un campo eléctrico , la inclusión de la radiación hace que los electrones dejen de ser controlados directamente por el campo eléctrico e incluso la mayoría se desplaza en una pequeña corriente inversa , éste último efecto se debe al gran incremento en la corriente directa que se produce en los protones , estos efectos resultan en que la corriente eléctrica pasa a ser controlada por los protones y resulta reducida respecto del caso en que no se tiene en cuenta la radiación .

En el gráfico 2d se ve que cuando no se considera la radiación , la perturbación δf de los protones cae rápidamente para altas velocidades ; este efecto también se verá en los gráficos subsiguientes , y si bien es real , debe estar seguramente exagerado El efecto se debe a que en algunos términos de colisiones de la forma de Boltzmann se obtienen valores grandes para la energía de alguna de las partículas resultantes , por esto aparecen términos en las ecuaciones que este método numérico vuelca al último intervalo de la partición en β y por lo tanto se refleja en el último punto (con $x = 3.2$) , aunque esos términos corresponderían a valores de x bastante mayores . Esta dificultad podría solucionarse ampliando la partición en β , con lo cual podría resol-

verse mejor el extremo de alta energía en los casos indicados. Debe notarse, que el error en el último punto de esa partición tiene influencia despreciable en los coeficientes de transporte.

Los gráficos 3, 4 y 5 muestran los valores de $\frac{\delta f_{\alpha}}{\mu F}$ para $\mu = 0.8873$ y diferentes fuerzas termodinámicas Z_{α} aplicadas (los δf_{α} corresponden a $Z_{\alpha} = 1$). En esos gráficos se indican en ocasiones entre paréntesis valores 1 o -1, éstos son los factores que se aplican a los segmentos de curvas que se interrumpen, en forma correspondiente. La intención de éstos gráficos es mostrar algunas de las diferentes formas que toman las curvas en función de la presión y la temperatura.

Los gráficos 3 y 4 corresponden a baja temperatura, los gráficos 5 a alta temperatura. Los gráficos 3 y 5 son además de baja presión, el caso 4 tiene una presión 100 veces mayor.

Para los gráficos 3 y 4 se puede suponer que los procesos elásticos entre átomos son los más frecuentes por ser bajo el grado de ionización; además, debido a la baja presión la influencia de los procesos radiativos puede suponerse mayor en el caso 3 que en el 4. En ambos casos se ve que los átomos están más fuertemente acoplados a los electrones que a los protones.

En los gráficos 5, los procesos radiativos son también importantes por la baja presión. Como el grado de ionización es mayor (por la mayor temperatura) son muy frecuentes las colisiones elásticas entre electrones. Se ve además que las distribuciones de los átomos y protones se encuentran muy acopladas (tienen similar forma).

En los gráficos 6 se muestran los valores de conductividades térmica (en la forma de λT) y eléctrica que existen en la literatura. Por supuesto esos valores no corresponden a las condiciones que nos interesan pero permiten una comparación cualitativa de estas curvas con las obtenidas en esta tesis. En el gráfico 6a no se ha presentado el valor correspondiente a Spitzer y Harm (SH) pues si bien la dependencia con la temperatura es $\lambda \propto T^{5/2}$, igual a la dada por Braginskii (B), en al

menos una edición del libro de Spitzer (1962) parece haber un error, ya que la constante que se da como si aún no hubiera sido aplicado el factor de reducción por la anulación de la corriente eléctrica, coincide aproximadamente con el coeficiente dado por Braginskii, el cual contiene ya aquella condición.

En las fórmulas de Braginskii y Spitzer, se usó para el logaritmo coulombiano el valor 10 y no se tuvo en cuenta su variación con la temperatura y densidad, por esto se explicarían pequeñas diferencias en las pendientes y valores absolutos entre las curvas correspondientes a un plasma ideal y los resultados de Devoto (D) en el límite de altas temperaturas y también respecto de mis resultados para alta ionización. Los gráficos no requieren comentarios adicionales excepto que en el 6a, en las curvas de los valores de Devoto, estos incluyen las llamadas componentes traslacional y reactiva, y ésta última es la que produce el máximo relativo que aparece en las curvas.

Los gráficos 7 muestran los resultados obtenidos en este trabajo de conductividad térmica (como $\lambda' T$) y el coeficiente "fototérmico" λ'_R en los casos en ETL.

En el gráfico 7a se ve que para alta ionización las curvas obtenidas coinciden notablemente con las de Braginskii y para los casos de baja presión, las curvas y la dependencia de la ubicación y ancho del máximo relativo, coinciden cualitativamente con las curvas correspondientes a Devoto. Sin embargo, para el caso de mayor presión ($p=10$ dina/cm²) se tiene que el máximo relativo se invierte y se obtiene un valor negativo de λ' como puede verse en las tablas XI para $T=8000^\circ K$. Ante esta situación he realizado cálculos en ese entorno para $p=100$ dina cm², viendo que la zona con valores negativos de λ' se refuerza y extiende hasta $T=10\ 000^\circ K$, algunos cálculos muestran que esta aparente anomalía es real y corresponde a la particular definición de λ' en nuestro caso, que no corresponde a las definiciones de CHC (usadas

por Devoto). Efectuando los cálculos para calcular λ como se explicó antes, se obtuvo para $\beta = 10 \text{ dina/cm}^2$ y $T = 8000 \text{ }^\circ\text{K}$ un valor $\lambda T = + 5.80 \times 10^8$. De esos cálculos se infiere que de haberse representado λT se obtendría un gráfico cualitativamente similar a las curvas de Devoto. También es importante notar que a partir de cierta presión entre 1 y 10 dina/cm^2 hay un cambio cualitativo extremadamente importante en ciertos coeficientes de transporte.

Los gráficos 8 muestran los valores de conductividad eléctrica y viscosidad volumétrica obtenidos en las mismas condiciones que las de los gráficos 7. En la 8a se ve que los resultados obtenidos son cualitativamente similares a los de Devoto y que para media y alta ionización corresponden aproximadamente a $\sigma \propto T^{3/2}$, de acuerdo con Braginskii y Spitzer, pero el coeficiente correspondiente sería un factor 1.5 menor que el de Braginskii, el cual es ya un factor 1.7 menor que el de Spitzer. Esto puede explicarse por la diferencia en los δf de los electrones que ya se mostró y explicó en el gráfico 1, pero no es de gran importancia en astrofísica. A partir de las curvas dadas puede decirse que para temperaturas menores que 6000 o $7000 \text{ }^\circ\text{K}$ la conductividad comienza a ser menor que la de un plasma ideal (para presiones entre 0.1 y 10 dina/cm^2).

El gráfico 8b se ve el cambio cualitativo en las curvas de $\omega(T)$ que ocurre entre las presiones 1 y 10 dina/cm^2 y el gran valor negativo que toma la viscosidad volumétrica para temperaturas cercanas a $8000 \text{ }^\circ\text{K}$. Este cambio se corresponde con el mencionado en las curvas de $\lambda' T$.

Los gráficos 9 muestran los coeficientes de difusión ambipolar térmica y "fotónica"; debido a que éstos tienen un rango muy grande de valores y presentan cambios de signo, se elaboraron las expresiones

$$e_1 = \rho \left(1 + \left(\frac{m_a}{m_e} \right)^2 \right) D_A^{T'}$$

para el gráfico 9a y de

$$e_2 = \rho \left(\frac{m_a}{m_e} \right) D_A^{R'}$$

para el 9b. De esta manera, los coeficientes pueden graficarse en una escala lineal razonable.

En el gráfico 9a, se ve la gran sensibilidad de la expresión e_1 respecto de la presión a baja temperatura y la escasa variación con la presión a alta temperatura que hace posible tomar una curva asintótica

$$e_1 \propto -T^5 \quad (\text{recordando que } T_R = T \text{ en este caso}).$$

En el gráfico 9b en cambio, la variación cualitativa con la presión es mucho menor y e_2 varía fuertemente para bajas temperaturas y tiende a un valor

$$e_2 \approx 6 \times 10^{11}$$

para altas temperaturas.

Para los casos (S) en que el campo de radiación corresponde a $W = 2.2 \cdot 10^{-3}$ y $T_R = 8000^\circ \text{K}$ (valores que corresponden a ciertas regiones de la atmósfera solar) las variaciones en todos los coeficientes son mucho menos abruptas, pero la sensibilidad a la presión es muy grande.

Los valores de los coeficientes de transporte de las tablas XI son los que deben usarse para calcular modelos en astrofísica, pues el usar los calculados por Braginskii o Spitzer y despreciar los demás, como se hace habitualmente, puede llevar a enormes y graves errores para ionizaciones medias y bajas.

Para la aplicación de esos coeficientes deben tenerse en cuenta las tablas IX y X, de manera que no se apliquen valores y definiciones más allá de sus límites de validez.

El límite que se aplica a $\bar{\epsilon}_R$ puede elaborarse y llevarse a un límite en la habitualmente llamada temperatura efectiva (T_{ef}), para lo cual se puede definir la opacidad de Rosseland. A partir de la ecuación de transporte de radiación y debido a que en esta aproxi-

mación la función fuente S es isotrópica, resulta

$$H_v = \frac{1}{2} \int \mu I_v d\mu = -\frac{1}{2} \int \frac{\mu^2}{\kappa_v} \frac{dI_v}{dz} d\mu = -\frac{1}{\kappa_v} \frac{dK_v}{dz},$$

de acuerdo a esto se define la opacidad media de Rosseland κ_R de la siguiente manera

$$\frac{1}{\kappa_R} \frac{dB}{dz} = \frac{1}{\kappa_R} \frac{d}{dz} \int_0^\infty B_v dv = \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_v} \frac{dB_v}{dz} dv$$

siendo B_v la función de Planck y B su valor integrado sobre la frecuencia. Como de acuerdo a las suposiciones hechas es en esta aproximación $I_v \approx WB_v$, resulta

$$K_v = \frac{W}{3} B_v$$

y por lo tanto

$$H = \int_0^\infty H_v dv = -\frac{1}{\kappa_R} \frac{dK}{dz} = -\frac{W}{3\kappa_R} \frac{dB}{dz}$$

Además, de acuerdo a las definiciones es

$$H = \frac{5T_R^4}{4\pi}, \quad B = \frac{2b^4 T_R^4}{h^3 c^2} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{2\pi^4 b^4 T_R^4}{15 h^3 c^2} = \frac{8}{\pi} T_R^4$$

donde ζ es la constante de Stefan

$$\zeta = \frac{2\pi^5 b^4}{15 c^2 h^3} \quad)$$

resulta entonces

$$T_{\text{ef}}^4 = -\frac{W}{\zeta} \frac{8\pi b^4}{3 h^3 c^2} \frac{\pi^4}{15} T_R^4 \frac{z_R}{\kappa_R} = -W \frac{4}{3} T_R^4 \frac{z_R}{\kappa_R} \quad .$$

Teniendo en cuenta solamente el continuo de Lyman se obtiene

$$\kappa_R = \kappa_{V_0} \frac{x_0^3 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}}{\int_{x_0}^\infty \frac{x^6 dx}{e^x - 1}} = \kappa_{V_0} \frac{\pi^4 e^{x_0}}{15 x_0^3 Q}$$

$$\text{con} \quad Q = 1 + \frac{6}{x_0} \left(1 + \frac{5}{x_0} \left(1 + \frac{4}{x_0} \left(1 + \frac{3}{x_0} \left(1 + \frac{2}{x_0} \left(1 + \frac{1}{x_0} \right) \right) \right) \right) \right) \right)$$

$$\kappa_{V_0} = a_{V_0} n_a \quad \text{y} \quad x_0 = \frac{h \nu_0}{k T_R} \quad .$$

De las expresiones dadas, pueden deducirse los valores de temperatura efectiva crítica y máxima correspondientes a los z_R .

De aquí se ve que en los vientos estelares y en las envolturas de estrellas tempranas, frecuentemente no pueden aplicarse las ecuaciones hidrodinámicas para describir el gas de átomos y aún a valores menores de la T_{ef} , no puede esperarse que la distribución de los átomos sea maxweliana y por lo tanto, el perfil del coeficiente de absorción en las líneas del hidrógeno presentará importantes asimetrías que se describirán mas adelante.

De todas maneras , aún en casos de T_{ef} mucho menores que el valor crítico , deben tenerse en cuenta los coeficientes radiativos en las ecuaciones hidrodinámicas pues pueden ser de gran importancia .

En los gráficos 10 se muestran las funciones de distribución $f(x)$ calculadas mediante $F \pm \delta f^a$, o sea hasta primer orden , asumiendo en cada uno de los gráficos que alguna de las fuerzas Z_{α} tiene un valor igual al máximo correspondiente .

Los gráficos 10 no deben suponerse exactos , ya que para valores de Z_{α} tan grandes , la importancia de la perturbación δf^a daría lugar a perturbaciones de órdenes mayores (incluso a valores de δf^s) no despreciables . En cambio éstos gráficos , muestran cualitativamente la forma de $f(x)$.

El gráfico 10a muestra que , aspecto tiene la distribución de electrones cuando está presente un fuerte gradiente de presión ($Z_N \neq 0$; $Z_T = 0$) o de temperatura ($Z_T = -Z_N \neq 0$; a presión constante) y en él se muestra F para comparación . Se ve aquí que el gradiente de presión produce una asimetría y una "cola no térmica" importantes , pero el gradiente de temperatura produce mas bien una división en dos componentes , una relativamente simétrica alrededor de $x = 0.5$ y otra muy asimétrica alrededor de $x = -1.75$ con una "cola no térmica" extremadamente importante . La separación en dos componentes que menciono se debe a que $f(x = -1)$ tiende a anularse .

El gráfico 10b muestra los casos con Z_E o Z_R que prácticamente coinciden dando una "cola no térmica" que al igual que en los casos anteriores puede tener importantes consecuencias en la ionización de elementos tales como el helio , silicio , carbono , nitrógeno u oxígeno para las atmósferas estelares .

Los gráficos 10c y 10d muestran la forma de la función de distribución de los átomos en forma similar a los anteriores , pero aquí se usó una escala lineal , pues la forma de la distribución correspondería a la del

FIGURAS

Explicación de las figuras

Figura 1 Perturbación en la función de distribución de los electrones

$\left(\frac{\delta f}{\nu F} \right)$ en función de la velocidad $\chi = v/v_T$, para $\nu = 0.8873$ y fuerza termodinámicas $Z_E = 1$. Las curvas llenas muestran los resultados de SH y las de líneas y puntos los resultados obtenidos en esta tesis. Los símbolos \odot indican el caso de un gas de electrones (E), los $*$ un gas de electrones y protones que sólo interactúan entre diferentes especies (L) y los $+$ un plasma ideal (P).

Figura 2 Perturbación en la función de distribución $\left(\frac{\delta f}{\nu F} \right)$ en función de la velocidad $\chi = v/v_T$, para $\nu = 0.8873$ con diferentes tipos de interacción.

En un gas de electrones con fuerzas termodinámicas: $Z_N = 1$ en el caso (a) y $Z_T = -Z_N = 1$ en el caso (b). Los símbolos \odot indican el caso de interacción coulombiana (FP) y los $+$ el caso de interacción entre esferas rígidas (B).

En un plasma parcialmente ionizado con fuerzas termodinámicas $Z_N = 1$ en el caso (c) y $Z_E = 1$ en el caso (d). Los símbolos \odot indican los valores correspondientes a electrones y los $+$ a los átomos, sin considerar la ionización (S). Los símbolos $*$ corresponden a los electrones y los \times a los átomos considerando la ionización (C).

Figura 3 Perturbación en la función de distribución $\left(\frac{\delta f}{\nu F} \right)$ en función de la velocidad $\chi = v/v_T$ para $\nu = 0.8873$ para $T = T_R = 5000^\circ K$, $p = 0.1 \text{ dina/cm}^2$ y $W = 1$ (caso A2E). Los símbolos \odot corresponden a electrones, los $*$ a protones y los $+$ a átomos. En las curvas que se interrumpen se indica el signo de la perturbación. La parte (a) corresponde a $Z_N = 1$, la parte (b) a $Z_T = -Z_N = 1$, la parte (c) a $Z_E = 1$ y la (d) a $Z_R = 1$.

Figura 4 Perturbación en la función de distribución $\left(\frac{\delta f}{\nu F}\right)$ en función de la velocidad $\chi = v/v_T$, para $\nu = 0.8873$ para $T = T_R = 5000^\circ K$, $\beta = 10 \text{ dina/cm}^2$ y $W = 1$ (caso A4E). Los símbolos \odot corresponden a electrones, los $*$ a protones y los $+$ a átomos. La parte (a) corresponde a $Z_N = 1$, la parte (b) a $Z_T = -Z_N = 1$, la (c) a $Z_E = 1$ y la (d) a $Z_R = 1$.

Figura 5 Perturbación en la función de distribución $\left(\frac{\delta f}{\nu F}\right)$ en función de la velocidad $\chi = v/v_T$, para $\nu = 0.8873$ para $T = T_R = 2000^\circ K$, $\beta = 0.1 \text{ dina/cm}^2$ y $W = 1$ (caso H2E). Los símbolos \odot corresponden a electrones, los $*$ a protones y los $+$ a átomos. En las curvas que se interrumpen se indica el signo de la perturbación. La parte (a) corresponde a $Z_N = 1$, la parte (b) a $Z_T = -Z_N = 1$, la parte (c) a $Z_E = 1$ y la (d) a $Z_R = 1$.

Figura 6 Valores de conductividades térmica (λ) y eléctrica (σ) de la literatura en función de la temperatura. En la parte (a) se muestra λT y la línea llena indica los valores de la fórmula de Braginskii. En la parte (b) se muestra σ , la línea llena indica los valores de la fórmula de SH y la línea de puntos los valores obtenidos por Braginskii. En ambos casos se indican los valores calculados por Devoto con los símbolos: \odot para presión $\beta = 10^4 \text{ dina/cm}^2$, $*$ para $\beta = 10^5 \text{ dina/cm}^2$ y $+$ para $\beta = 10^6 \text{ dina/cm}^2$.

Figura 7 Valores de conductividad térmica (λ') y de coeficiente foto-térmico (λ'_R) en función de la temperatura, calculados para $T = T_R$ y $W = 1$. En la parte (a) se muestra ($\lambda' T$) y en la parte (b) se muestra (λ'_R). En ambos casos se indica la presión con los símbolos: \odot para $\beta = 0.1 \text{ dina/cm}^2$, y

* para $p = 1$ dina/cm², y + para $p = 10$ dina/cm².

Figura 8 Valores de conductividad eléctrica (σ) y de coeficiente de viscosidad volumétrica (ω) en función de la temperatura, calculados para $T = T_R$ y $W = 1$. En ambos casos se indica la presión con los símbolos: \odot para $p = 0.1$ dina/cm², * para $p = 1$ dina/cm² y + para $p = 10$ dina/cm².

Figura 9 Valores de las funciones e_1 y e_2 correspondientes a los coeficientes ambipolares $D_A^{T'}$ y $D_A^{R'}$ en función de la temperatura. En ambos casos se indica la presión con los símbolos: \odot para $p = 0.1$ dina/cm², * para $p = 1$ dina/cm² y + para $p = 10$ dina/cm².

Figura 10 Función de distribución calculada hasta primer orden en función de la velocidad $x = v/v_T$ para $\nu = 0.8873$ y el caso (D2E) ($T = T_R = 10.000^\circ K$, $W = 1$, $p = 0.1$ dina/cm²). En la parte (a) se muestra la función de distribución de los electrones y se indica con los símbolos: * el caso de Z_N igual a su valor máximo, + el caso de $Z_T = -Z_N$ igual al valor máximo de Z_T . En la parte (b) se muestra la función de distribución de los electrones con los símbolos: * el caso de Z_E igual a su valor máximo y + Z_R igual a su valor máximo, (ambos símbolos coinciden) en este caso. Las partes (c) y (d) muestran la función de distribución de los átomos en forma análoga a los casos anteriores. En todos los casos se usa el símbolo \odot para representar la función de distribución a orden cero (F).

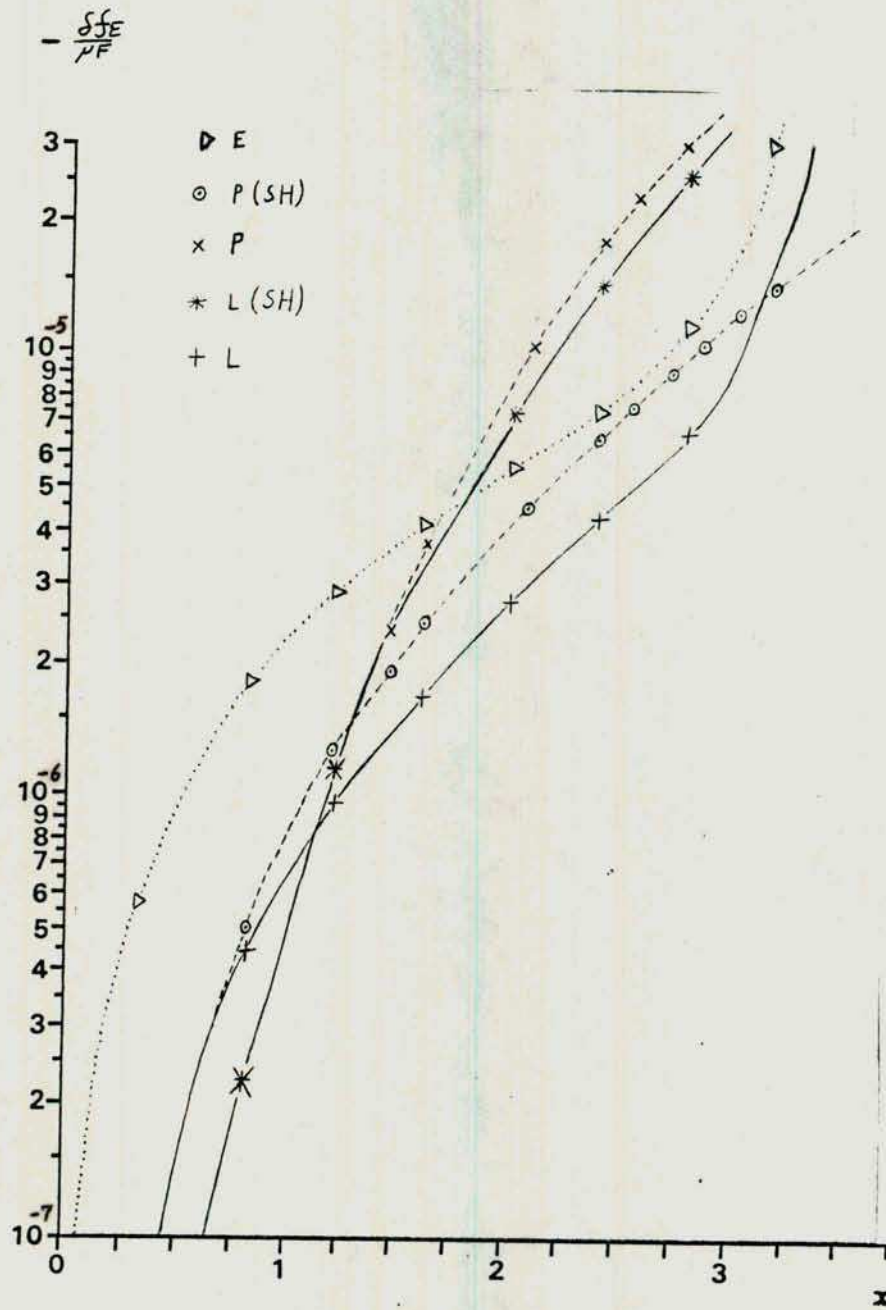


Figura 1

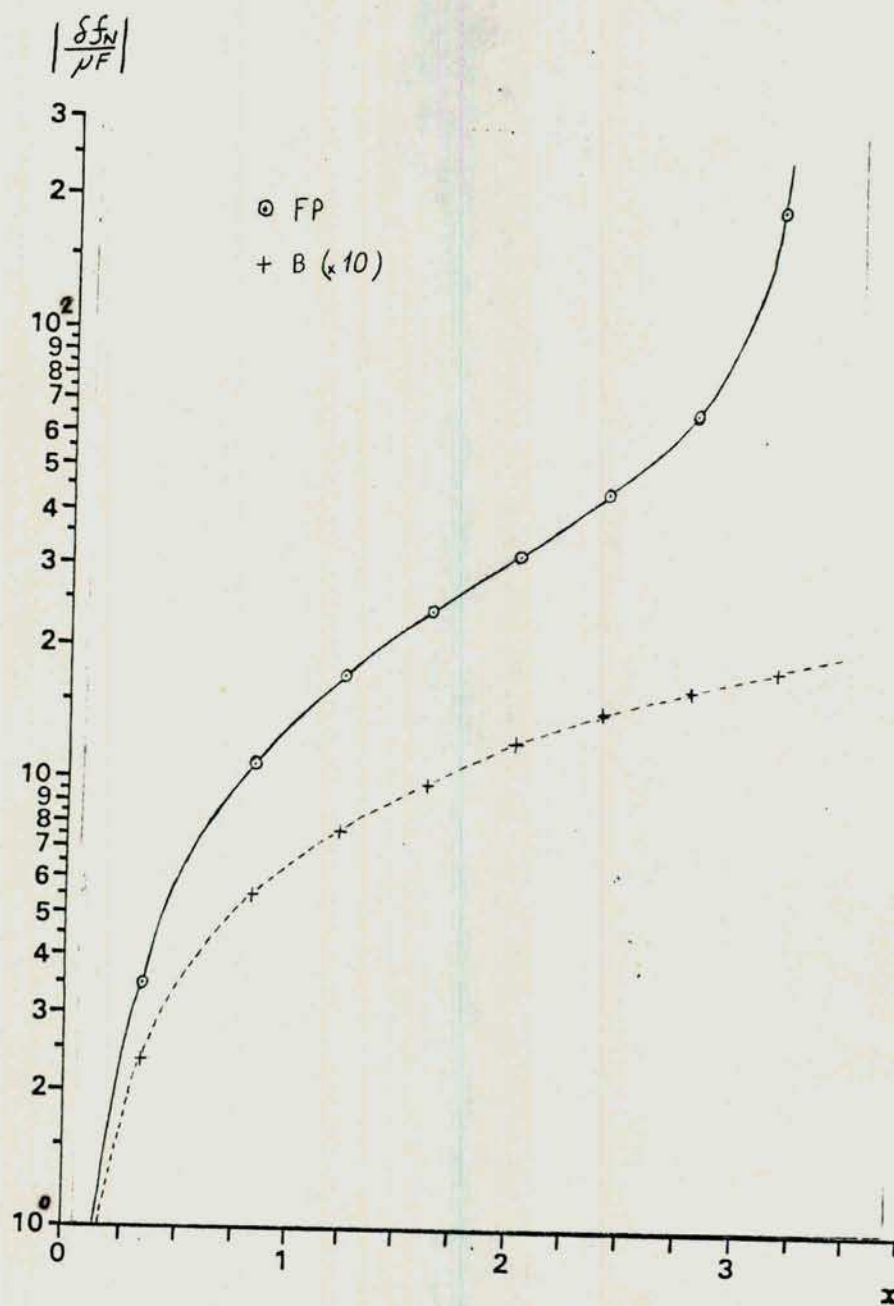


Figura 2a

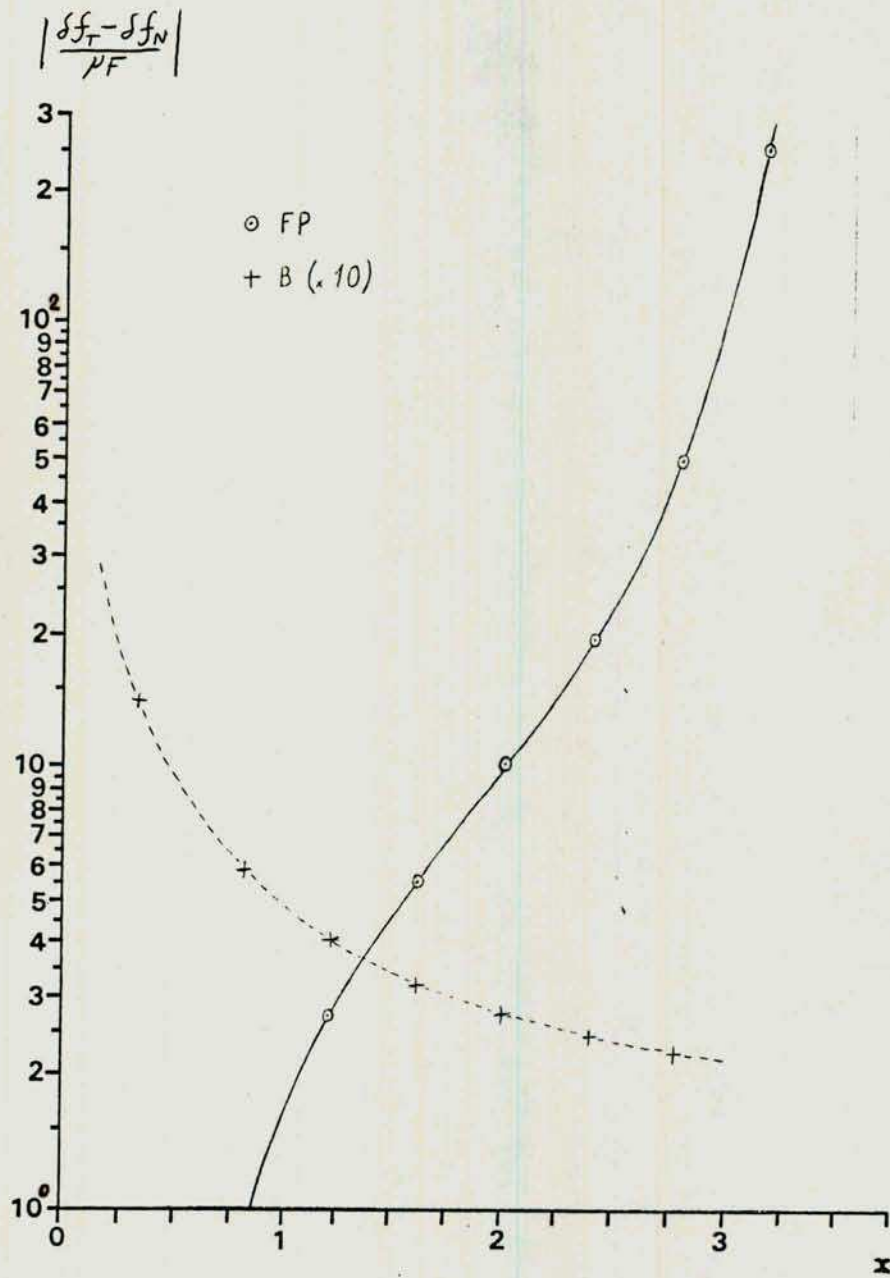


Figura 2b

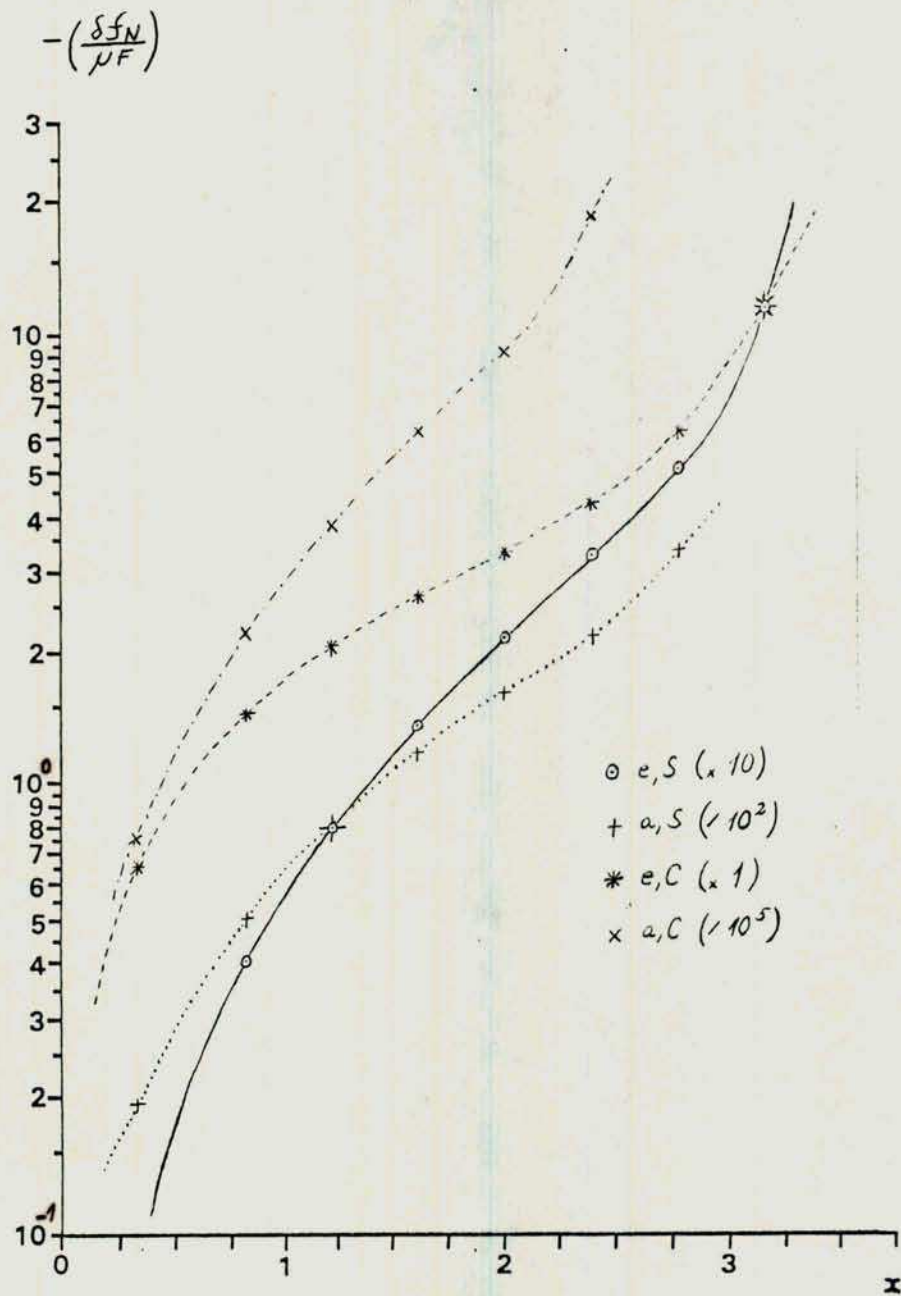


Figura 2c

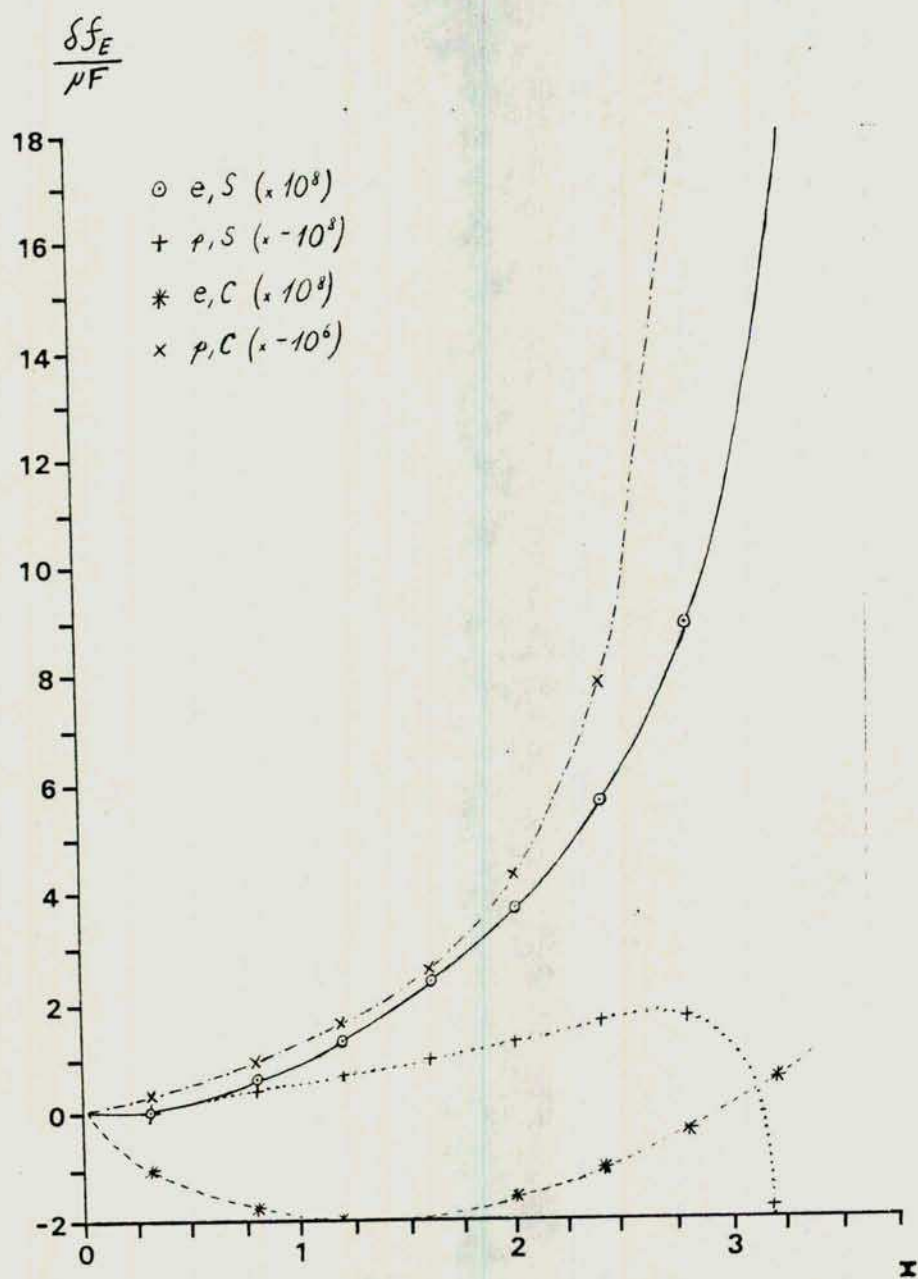


Figura 2d

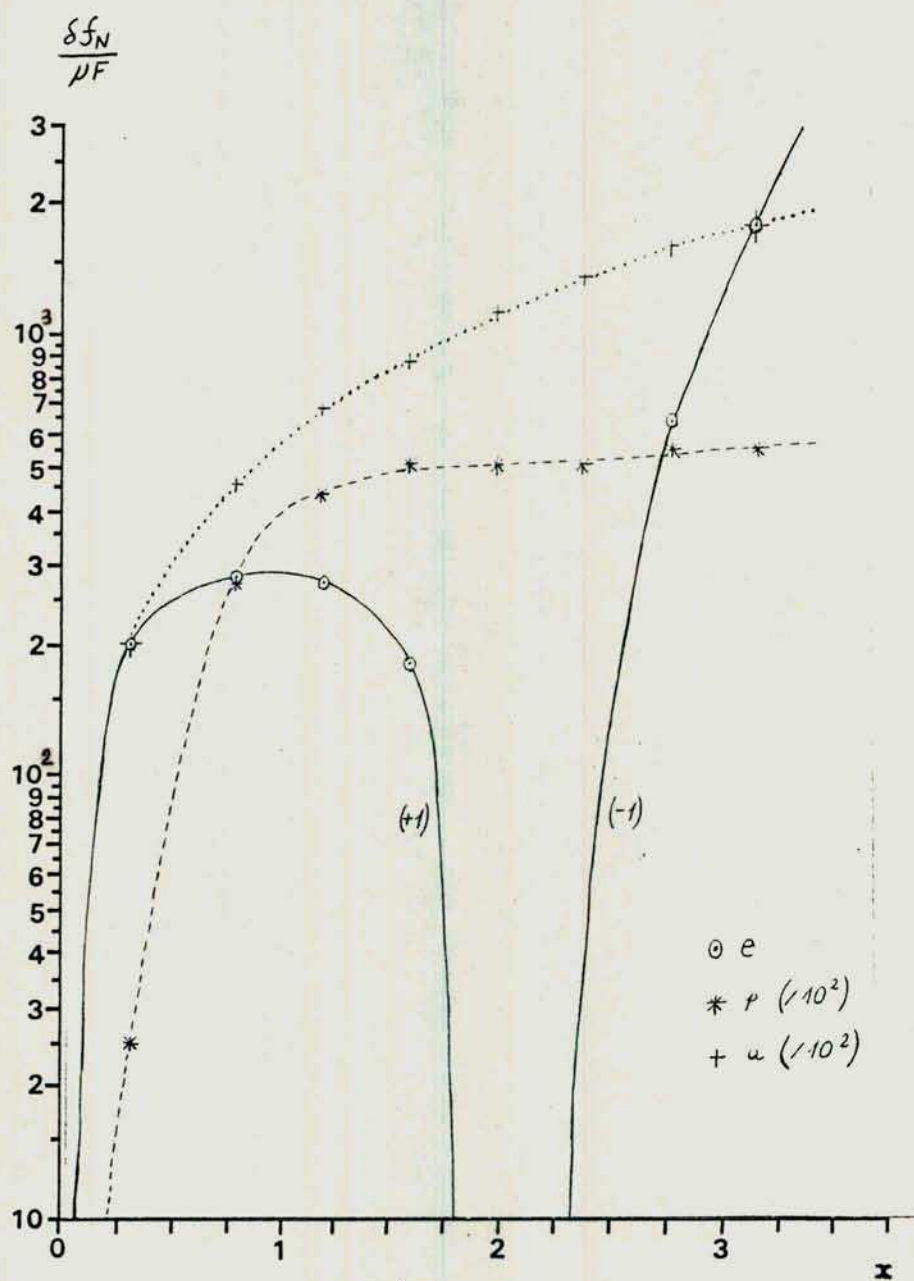


Figura 3a

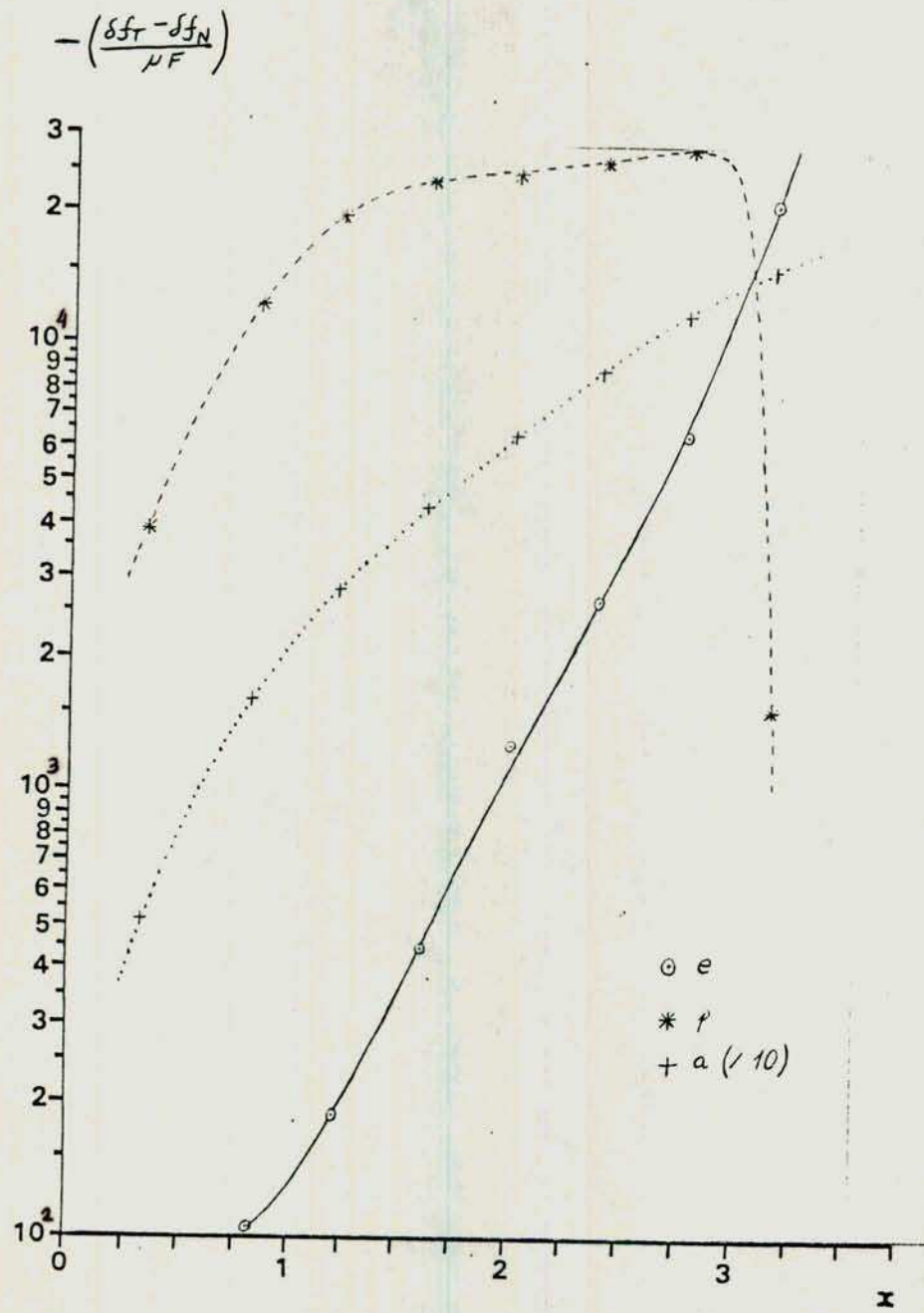


Figura 3b

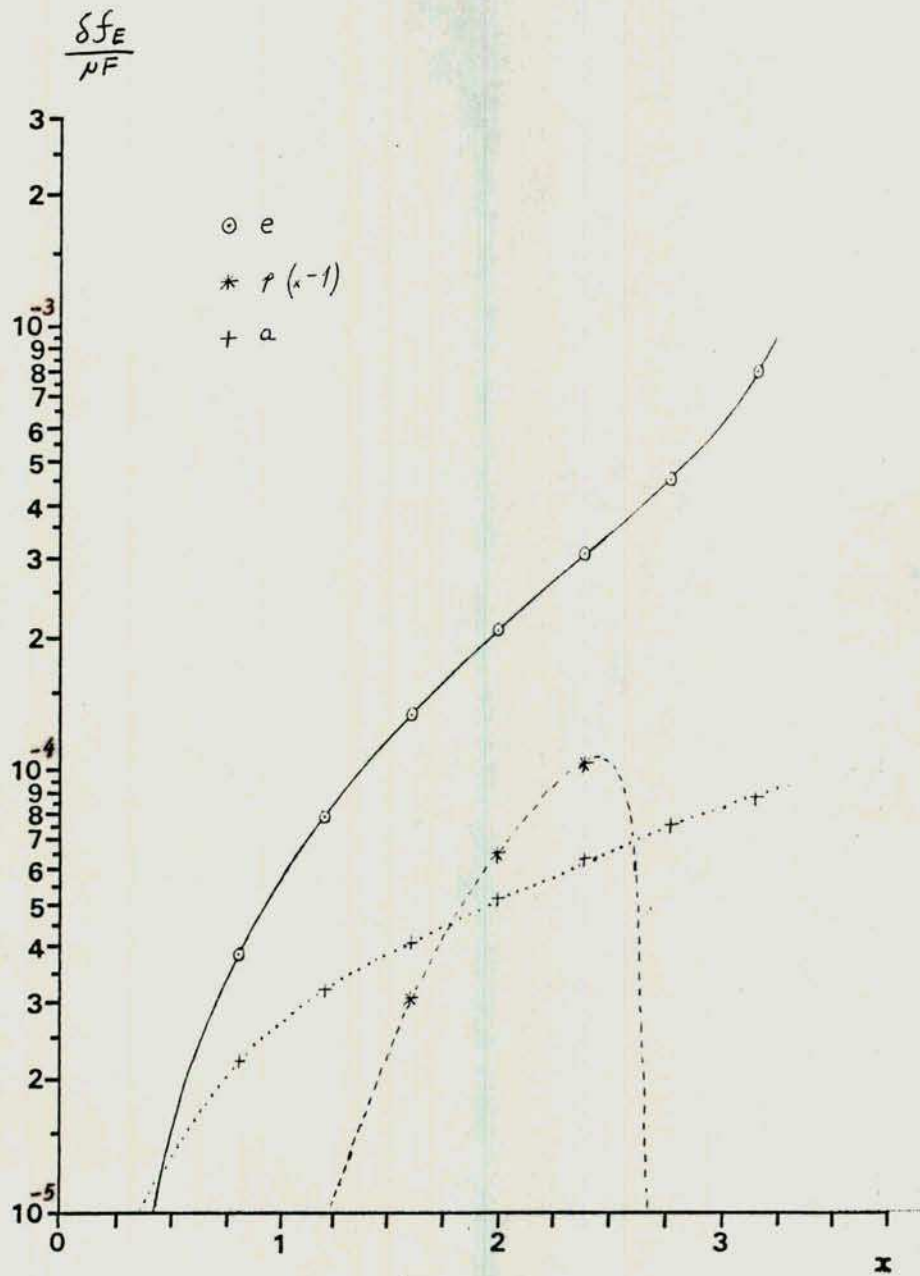


Figura 3c

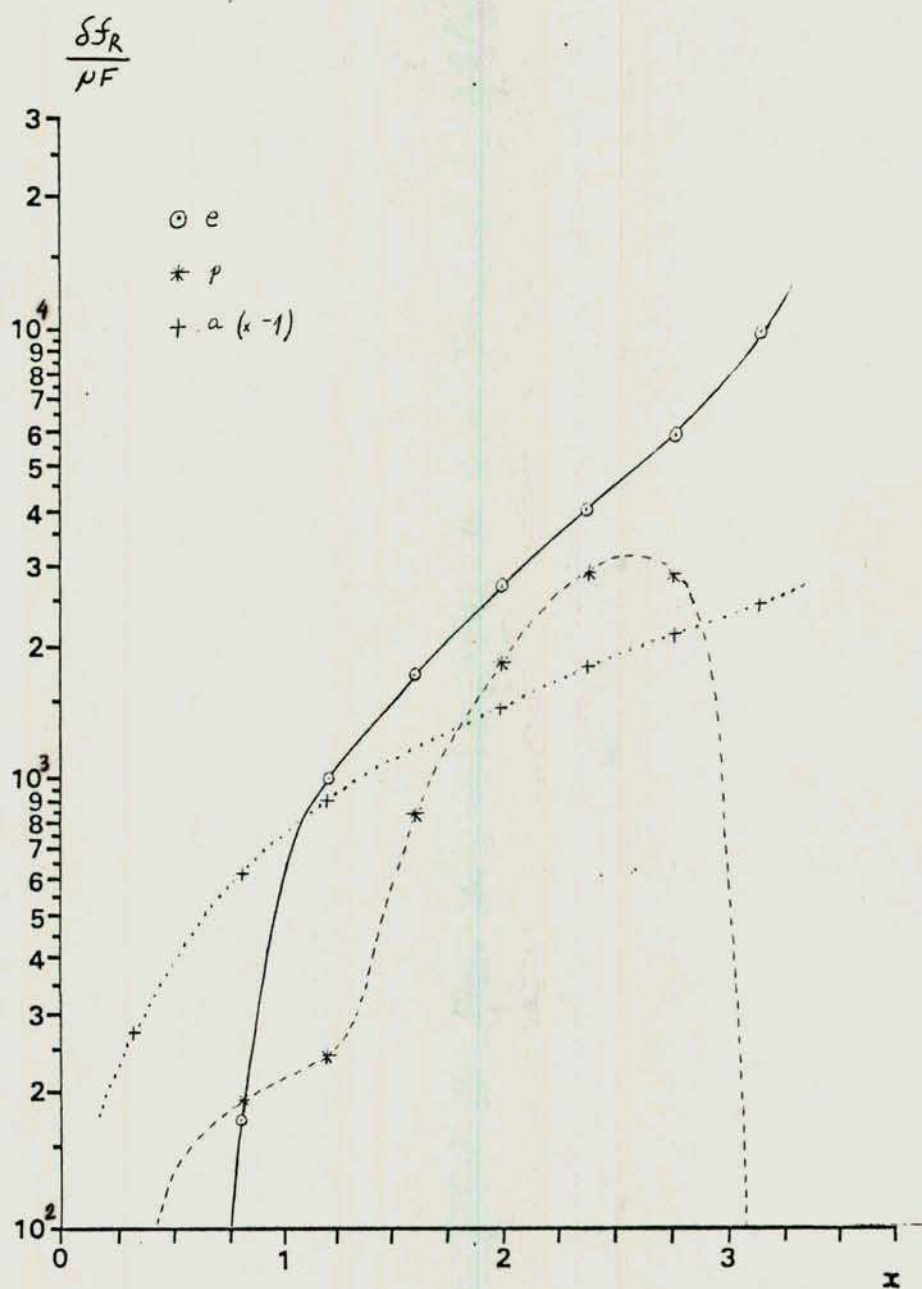


Figura 3d

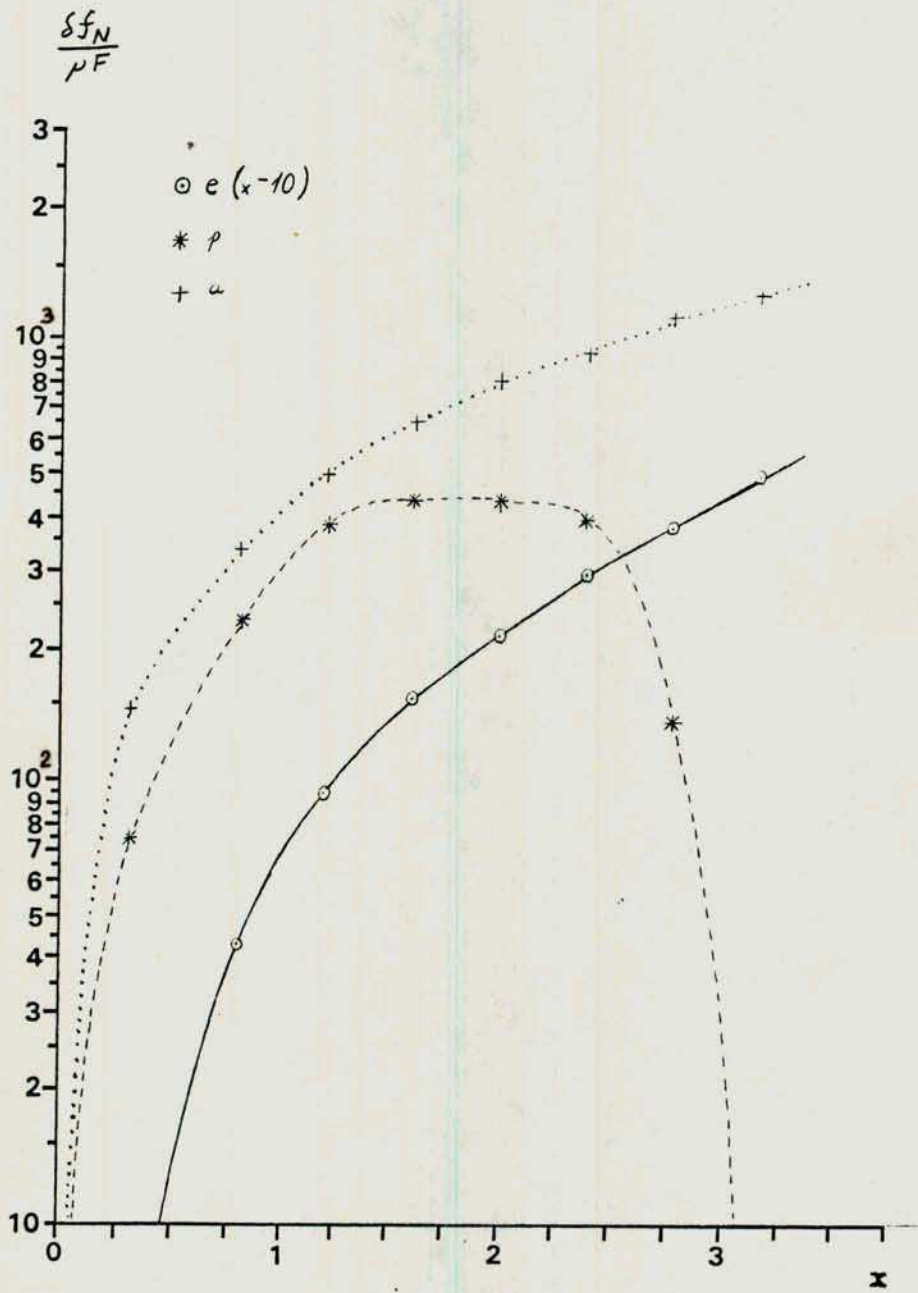


Figura 4a

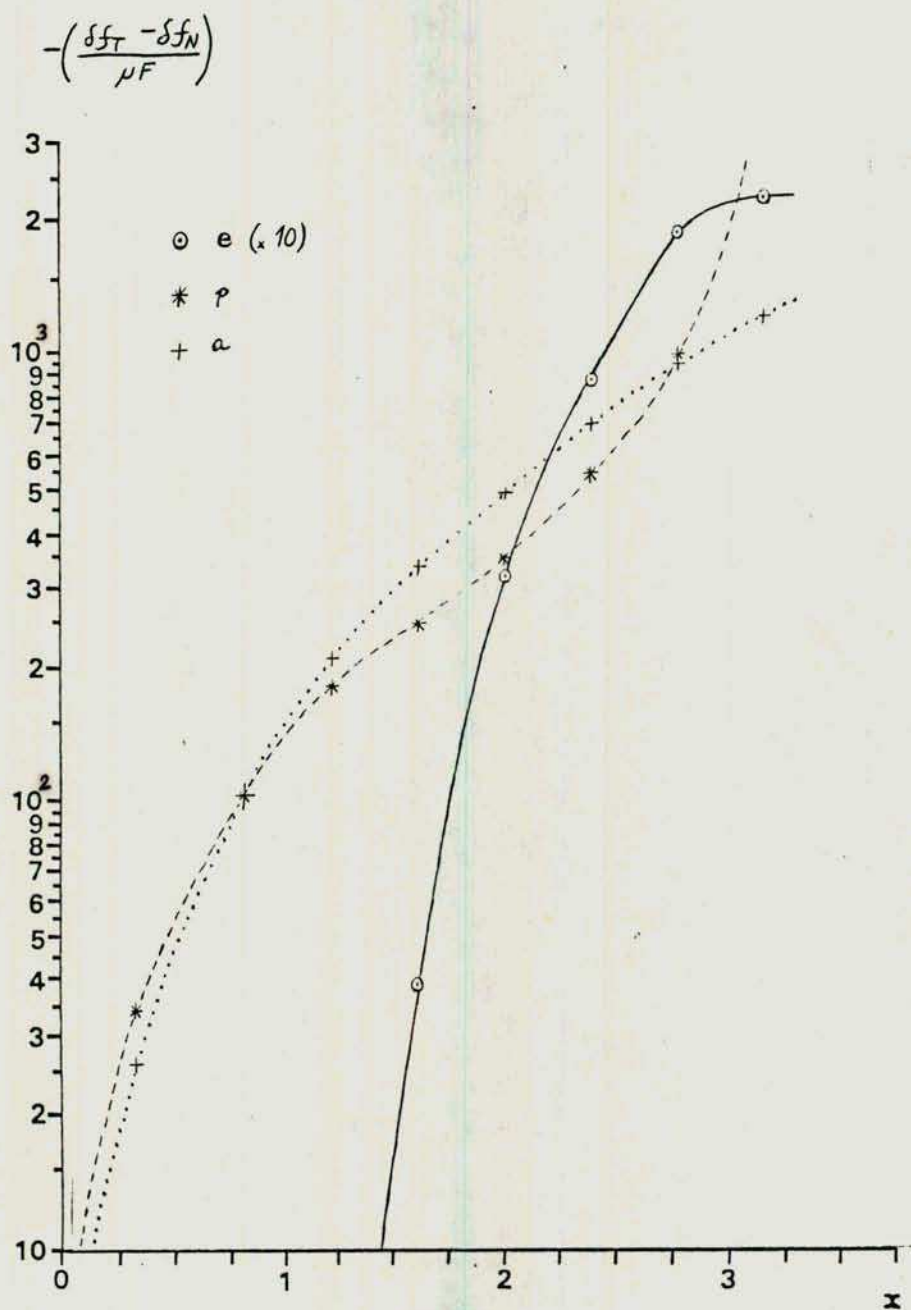


Figura 4b

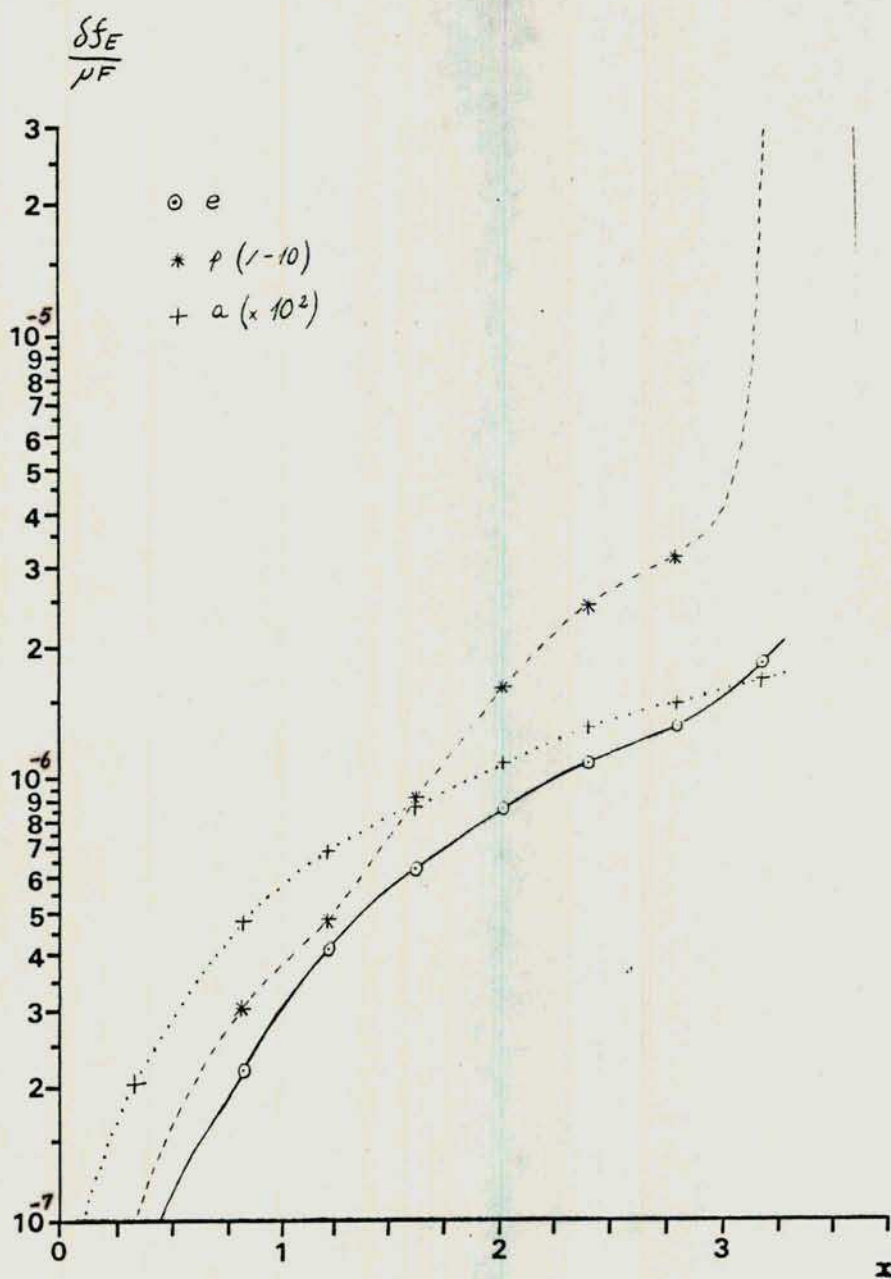


Figura 4c

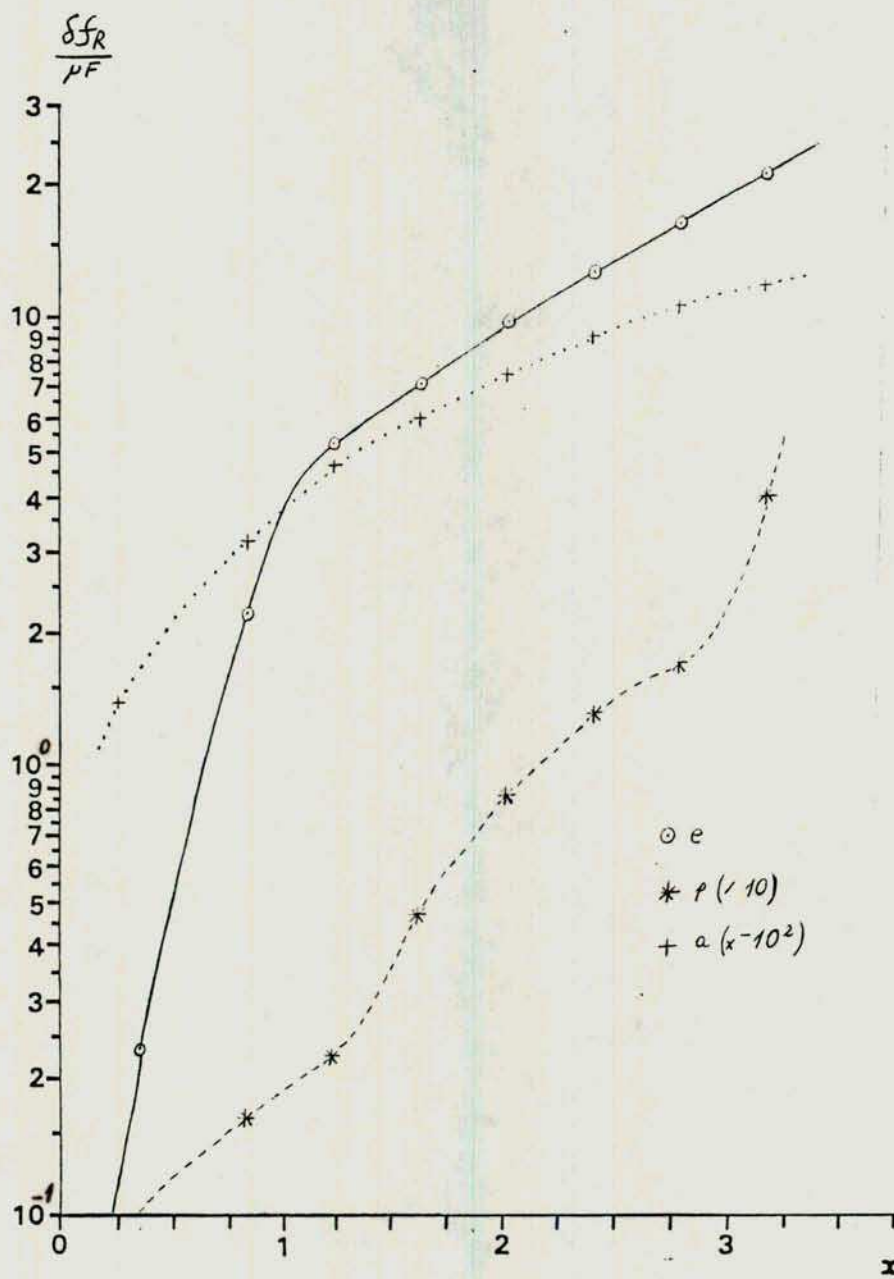


Figura 4d

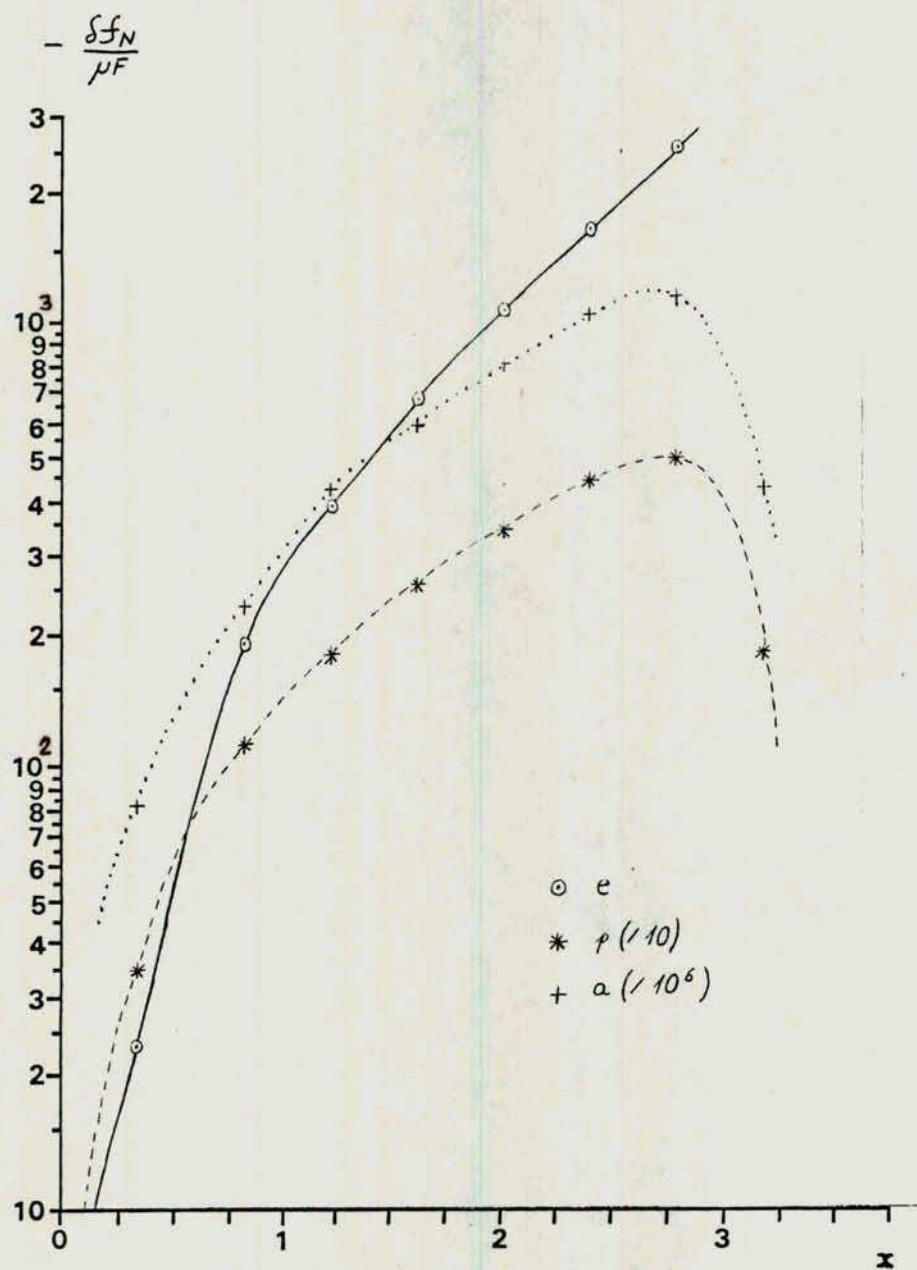


Figura 5a

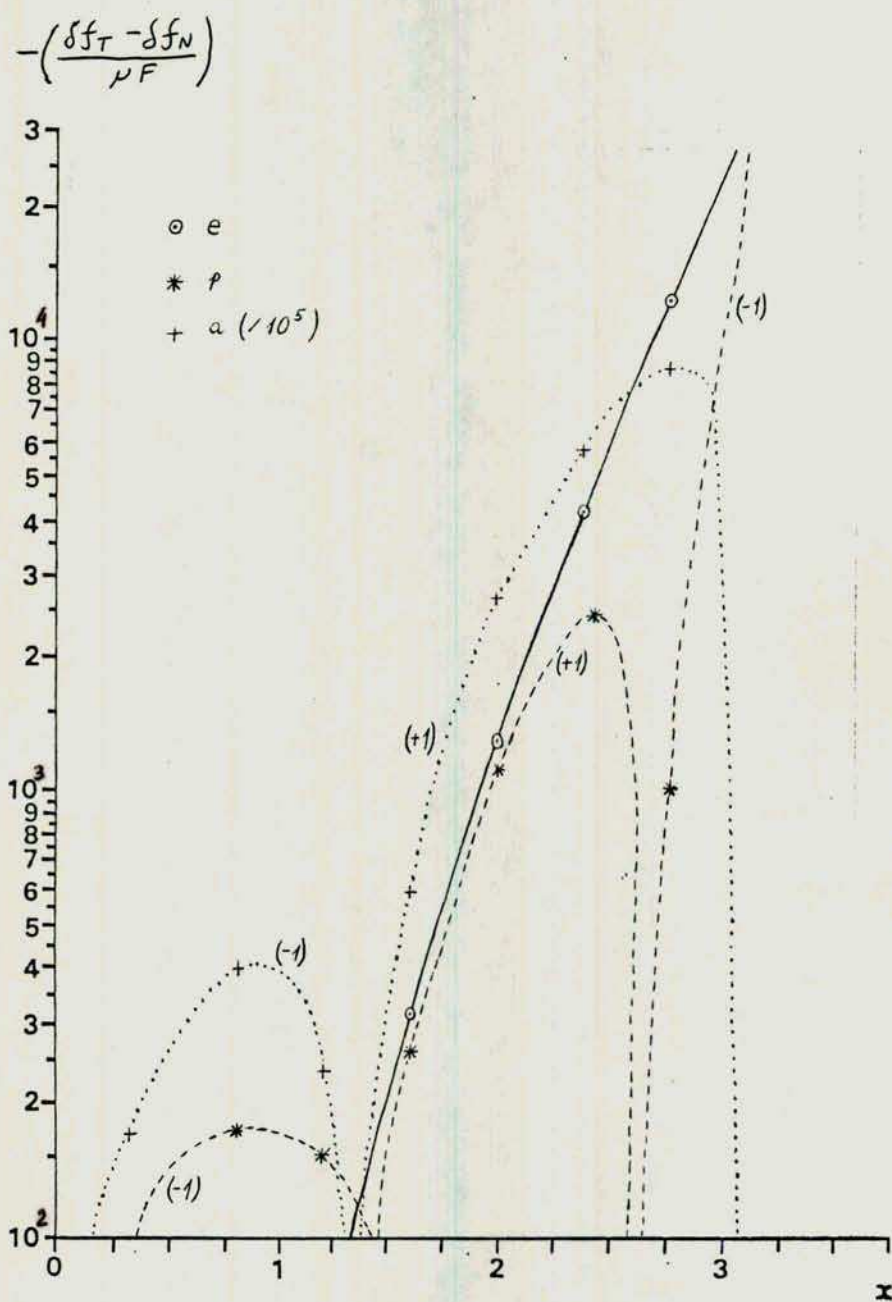


Figura 5b

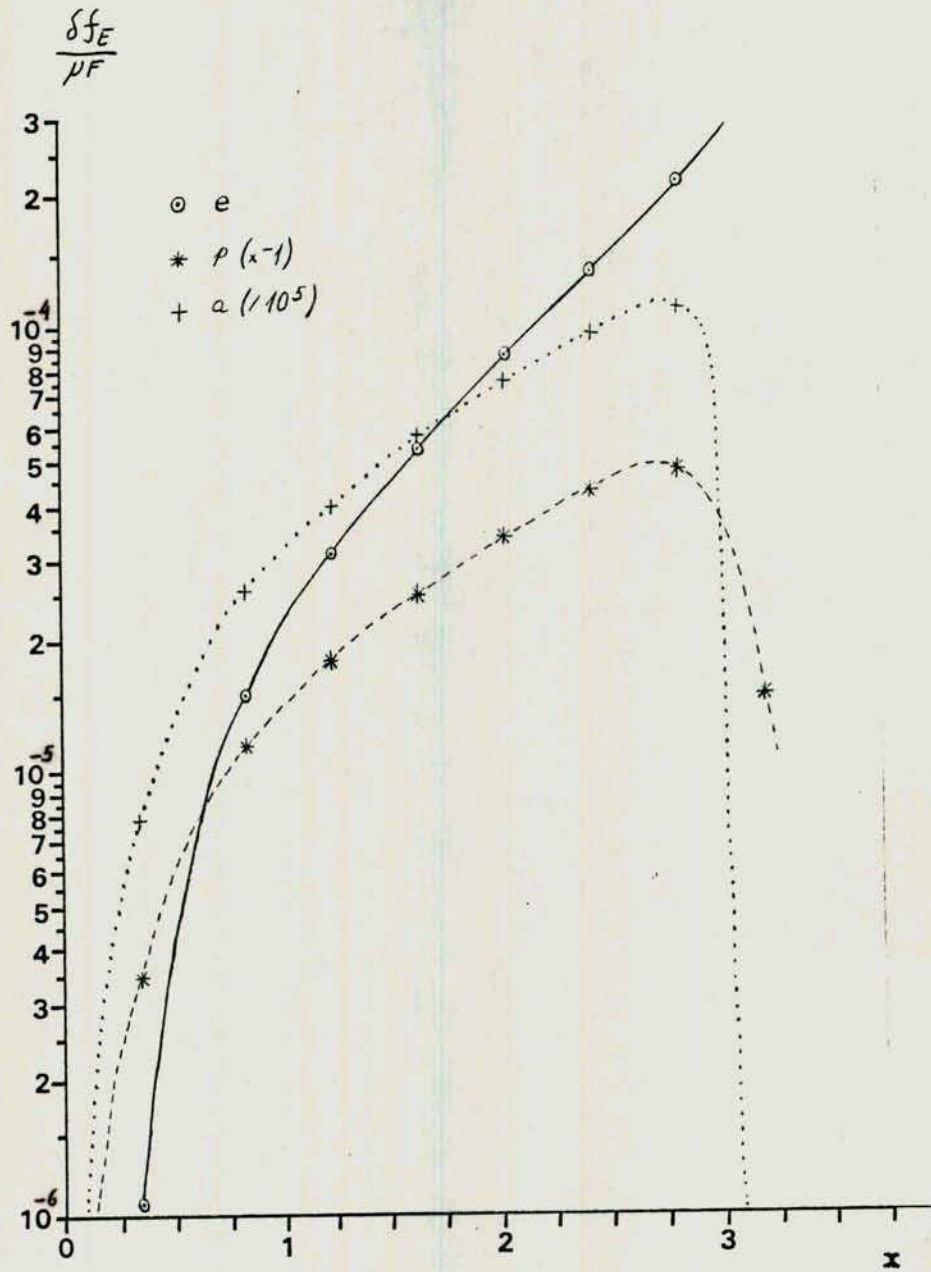


Figura 5c

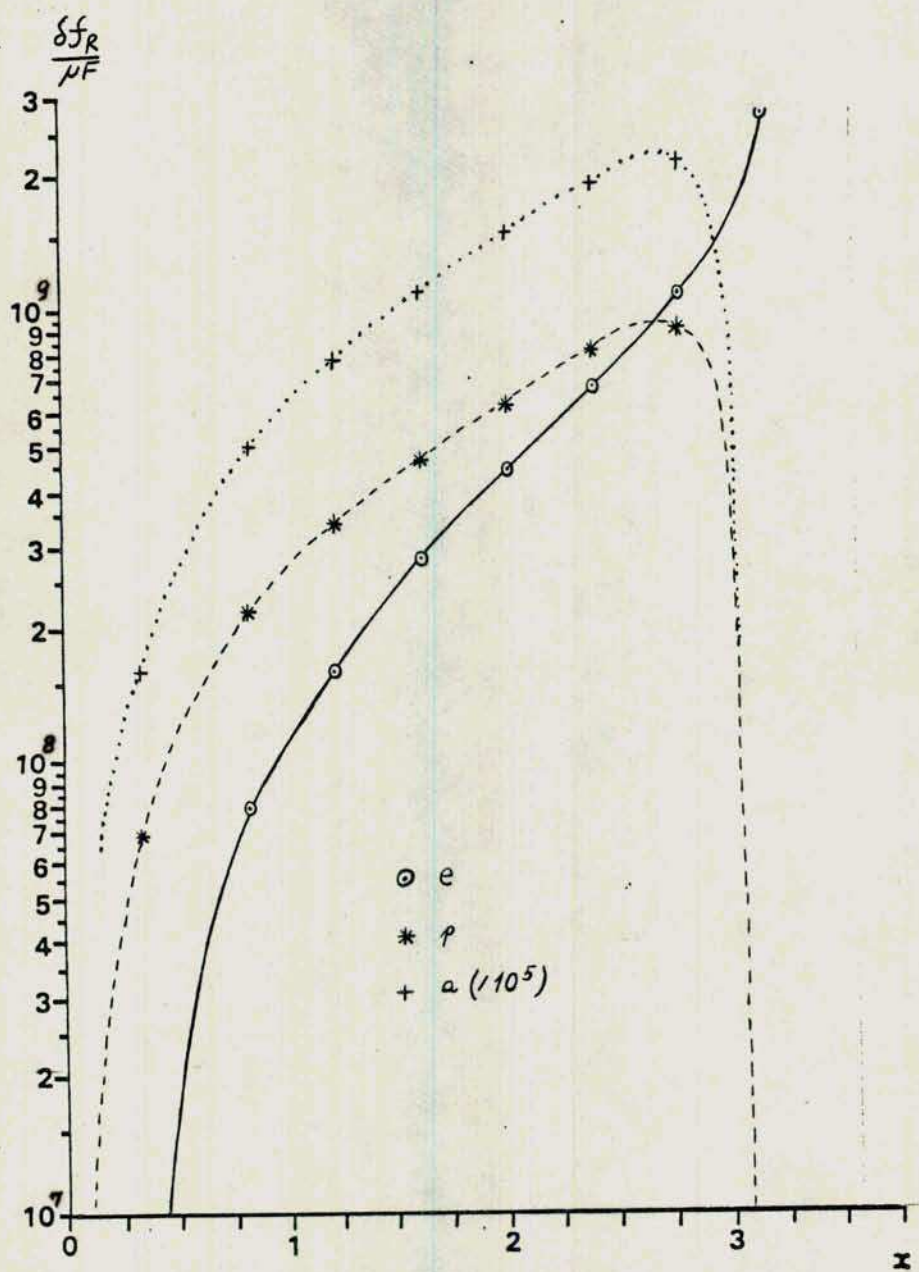


Figura 5d

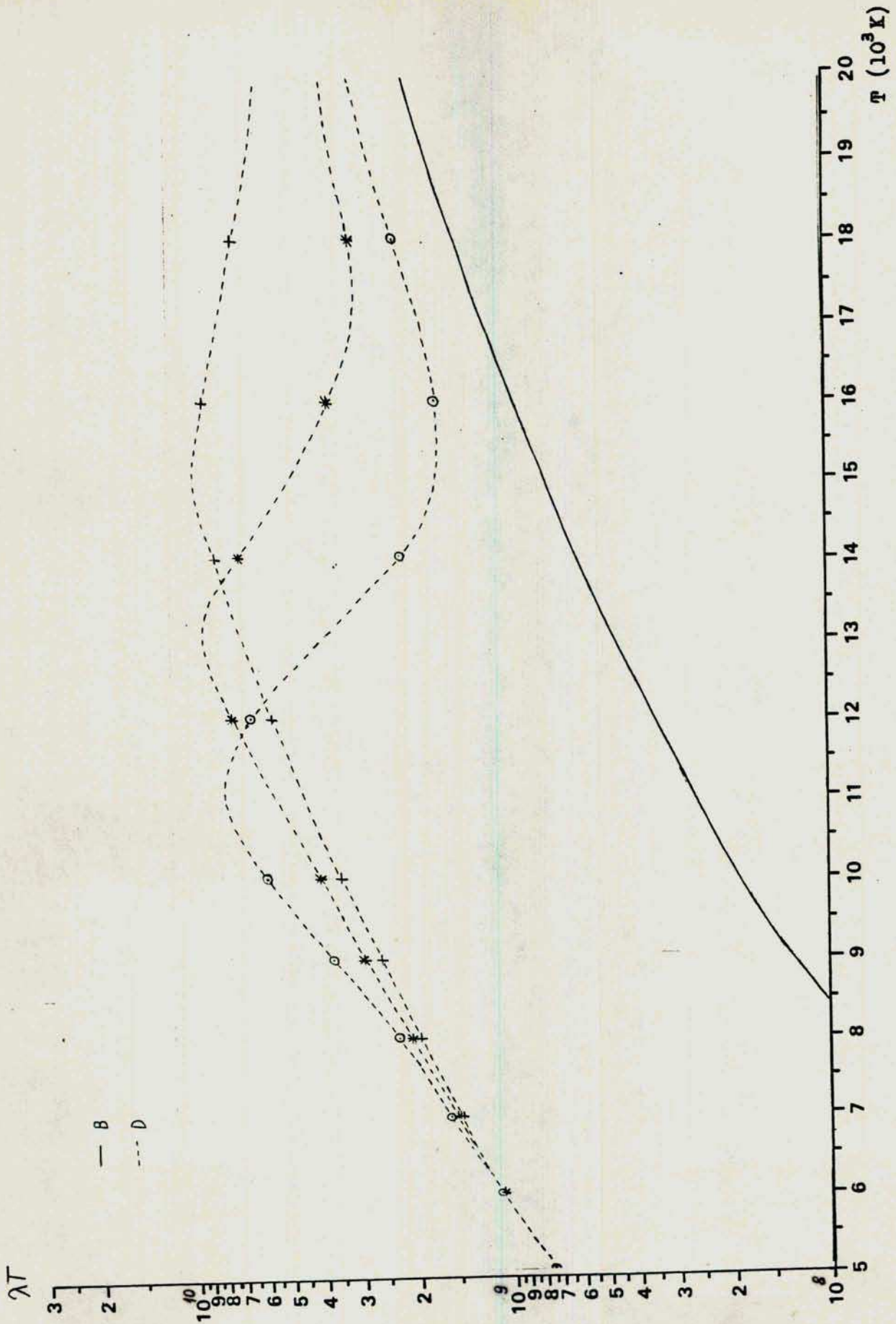


Figura 6a

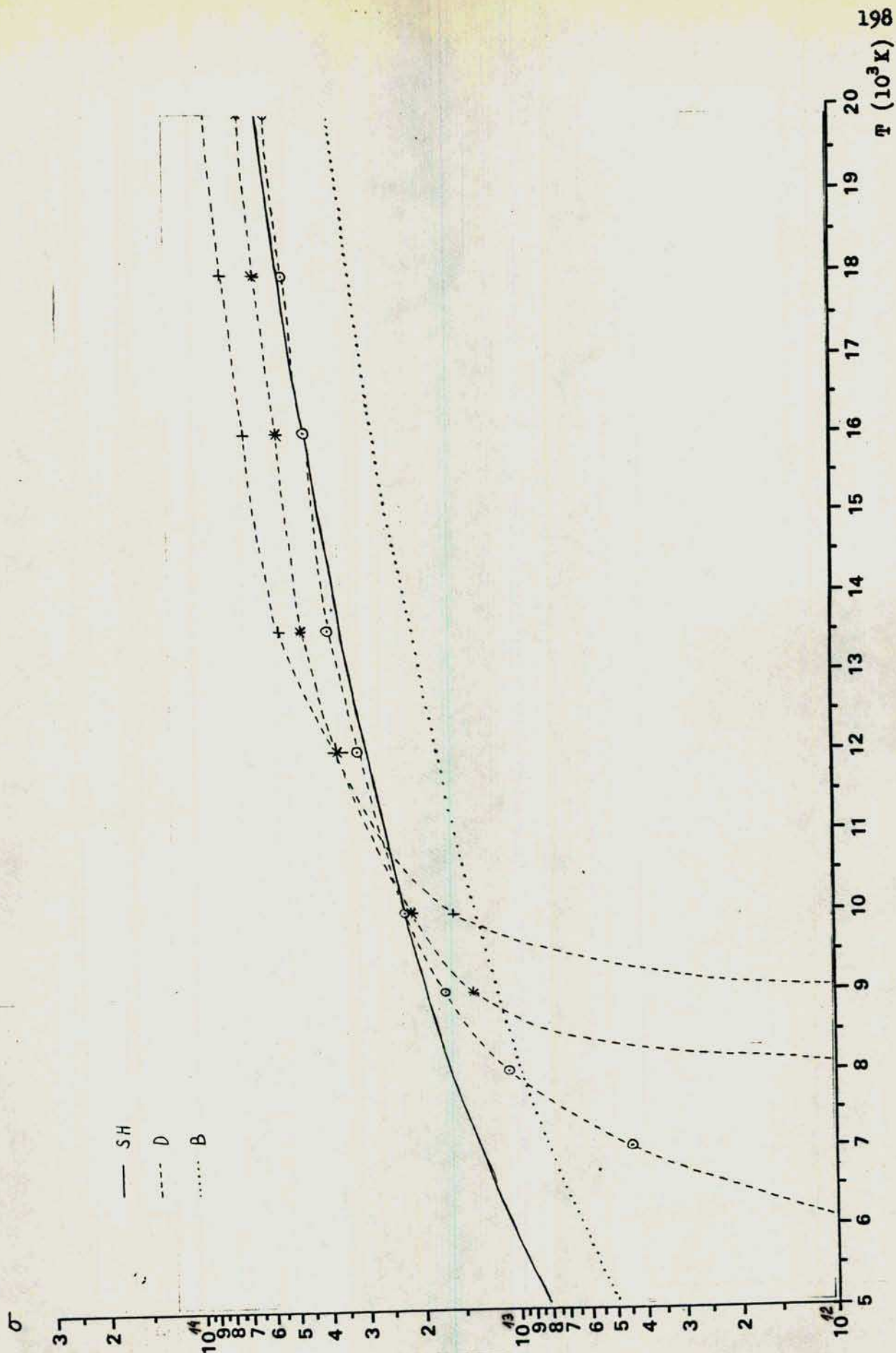


Figura 6b

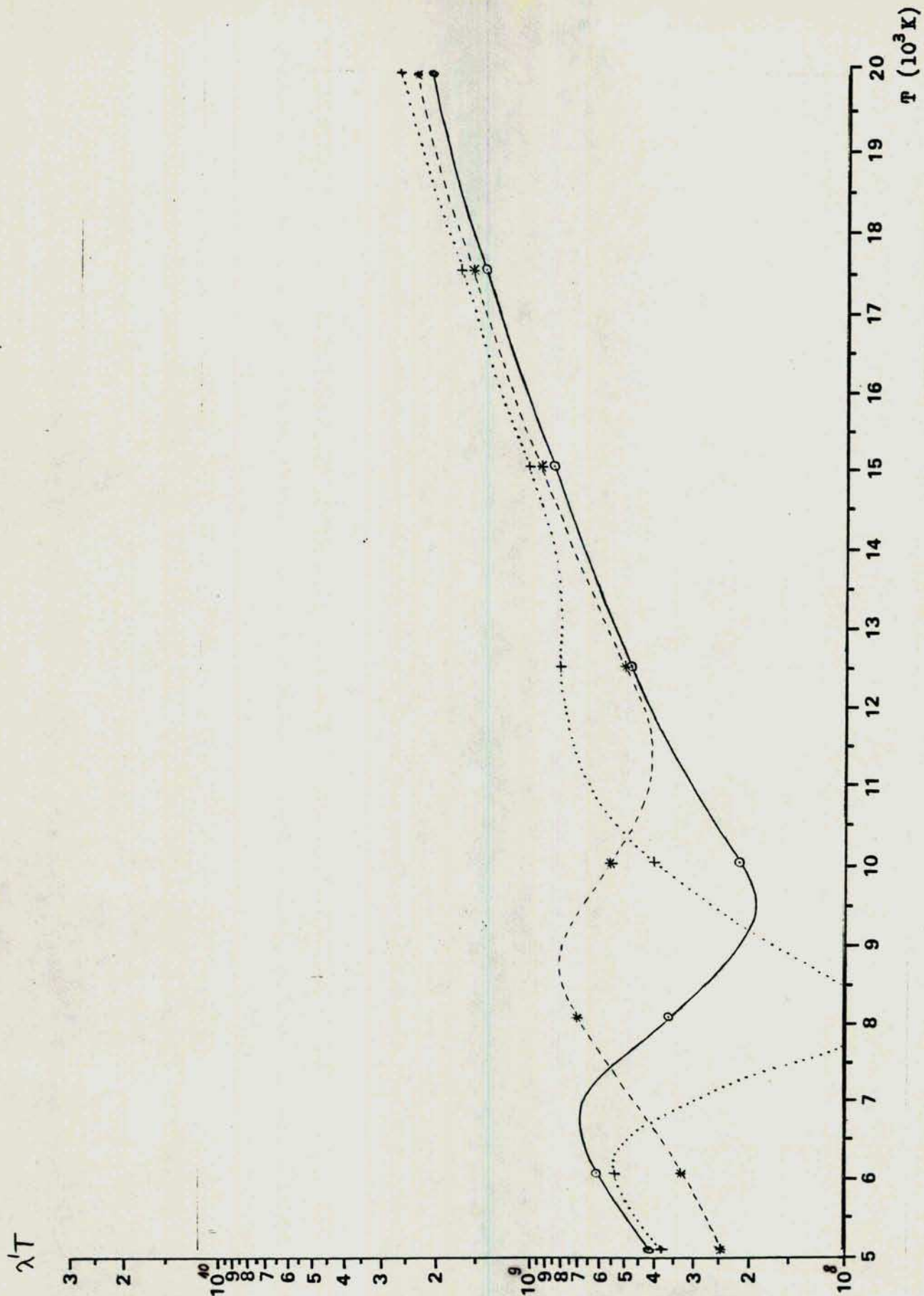


Figura 7a

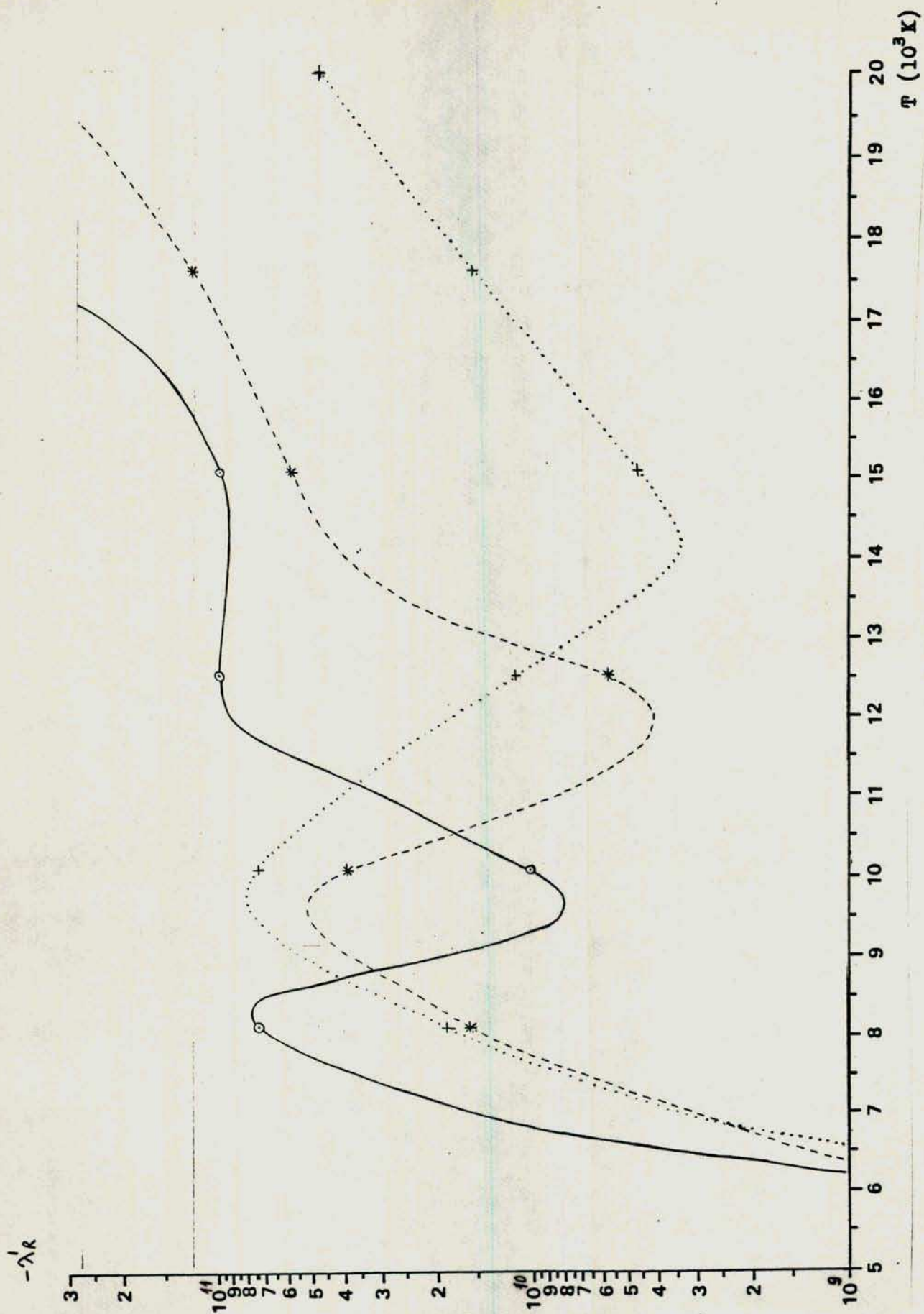


Figura 7b

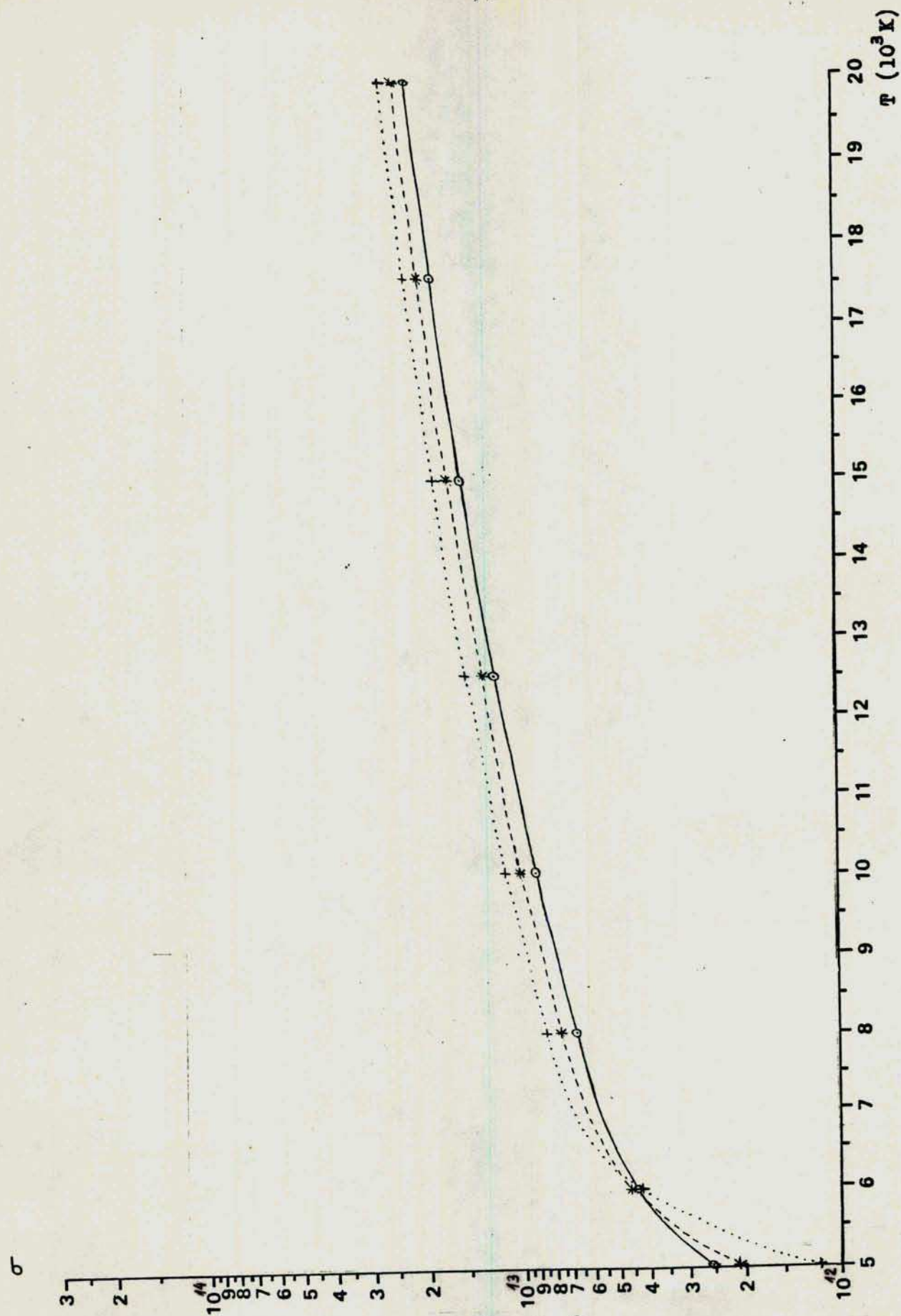


Figura 8a

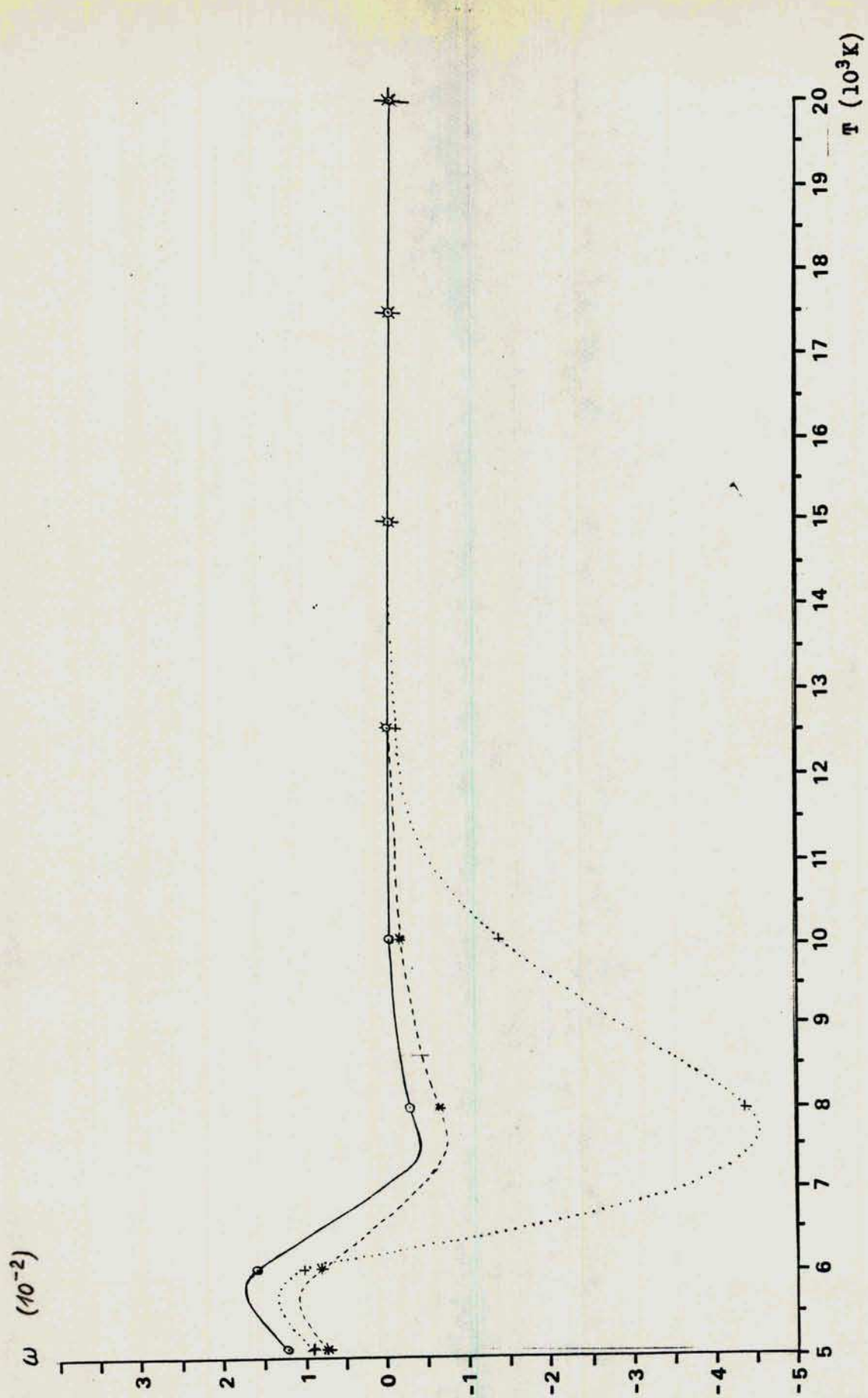


Figura 8b

$e_1 (10^{12})$

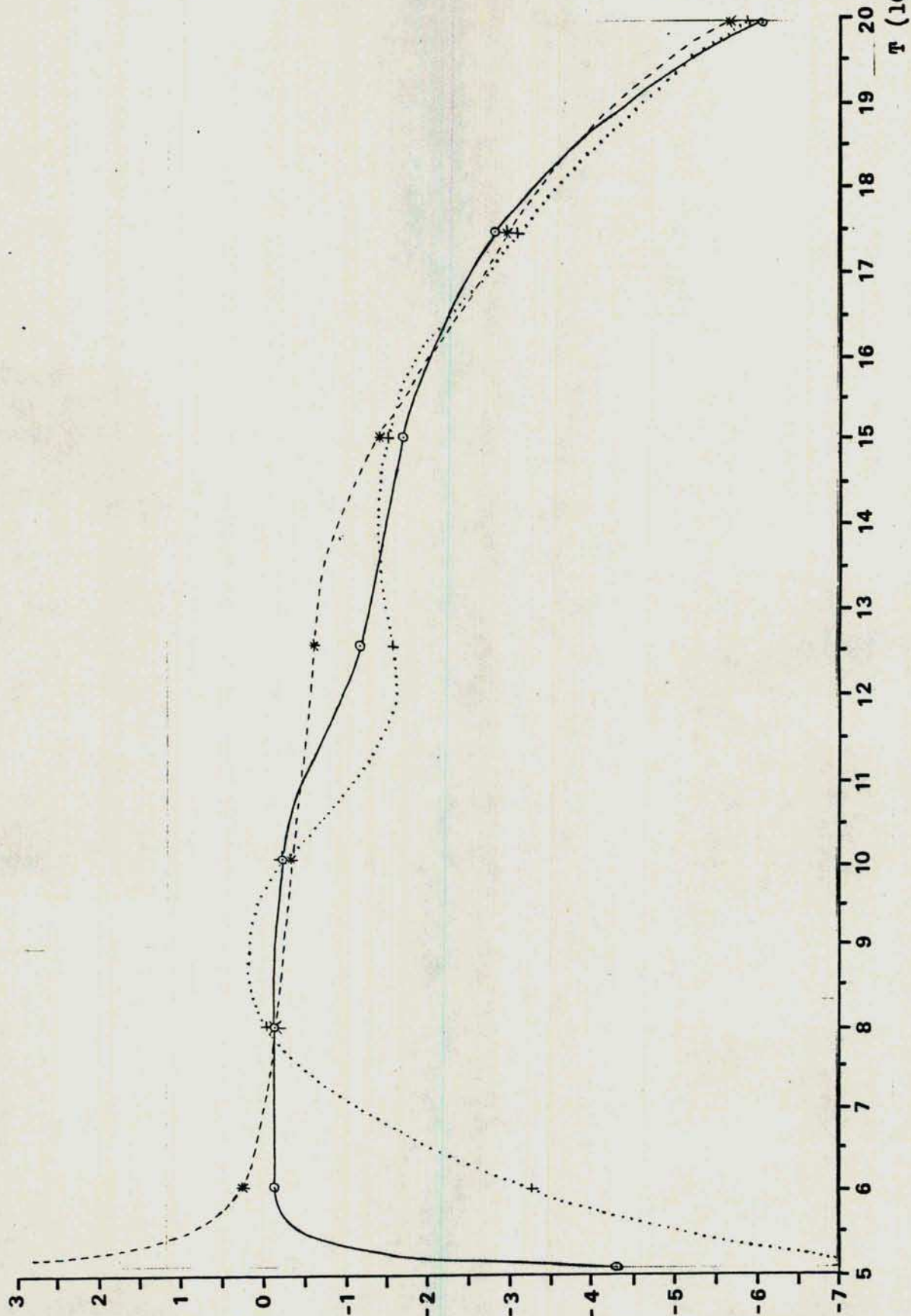


Figura 9a

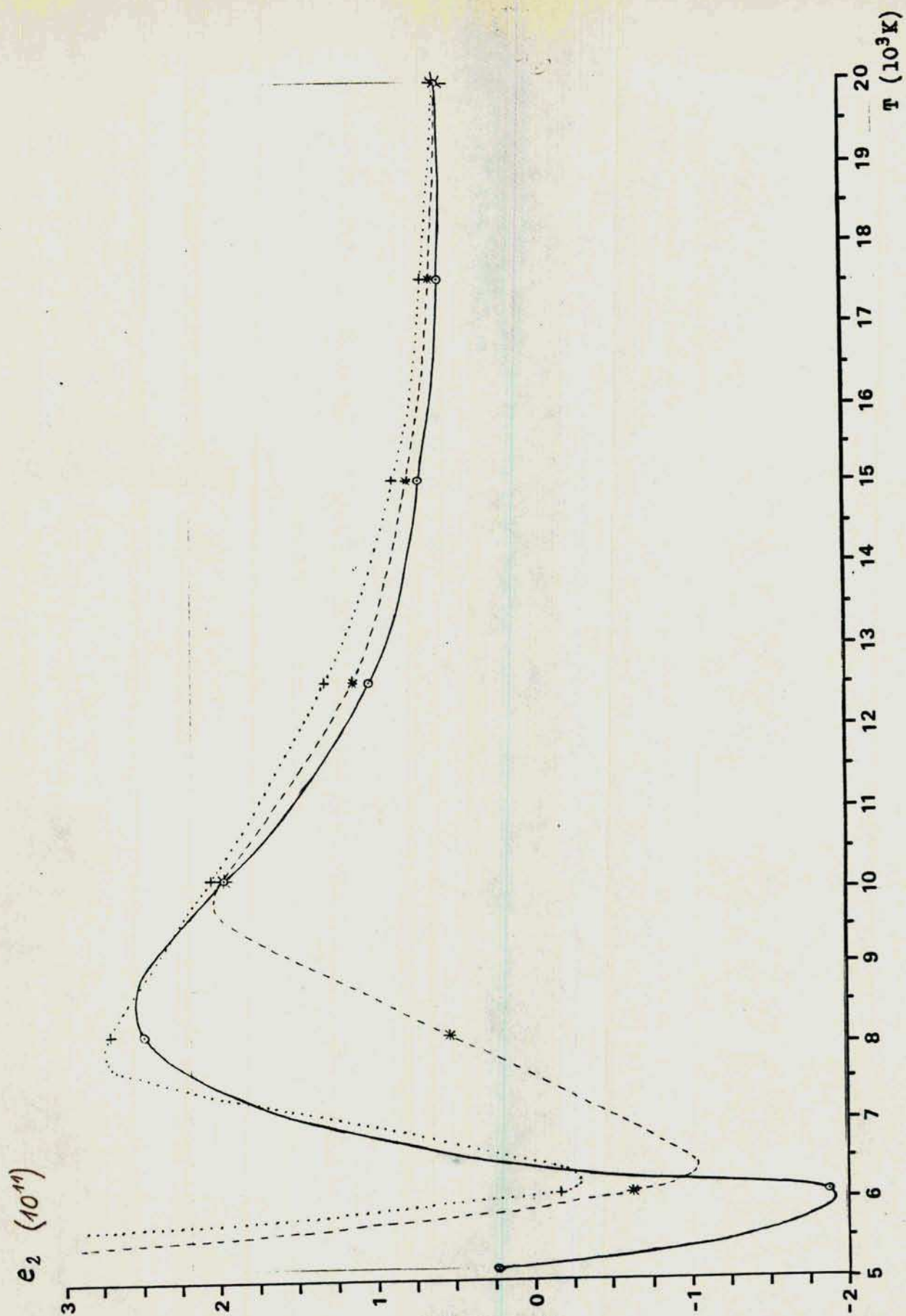


Figura 9b

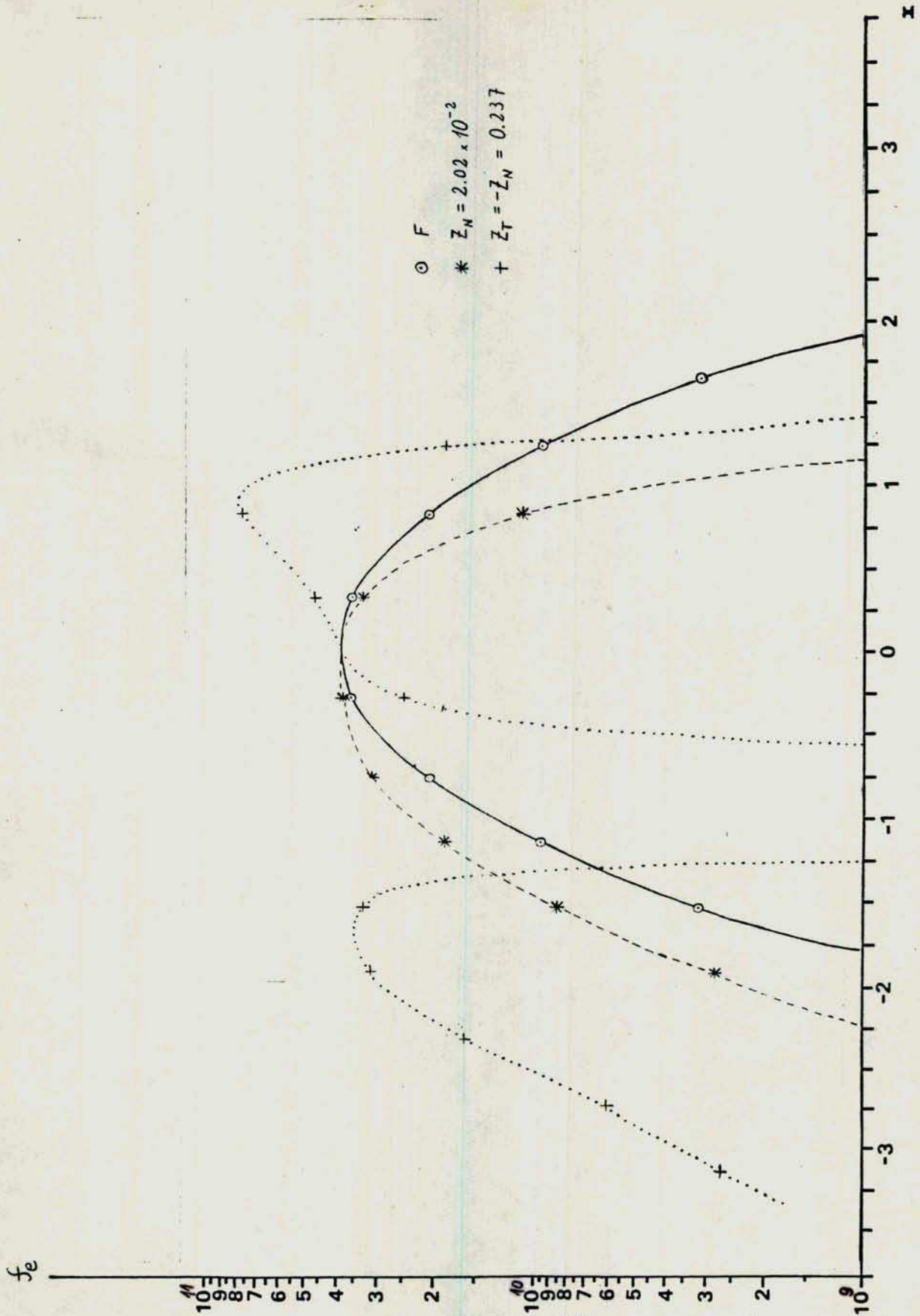


Figura 10a

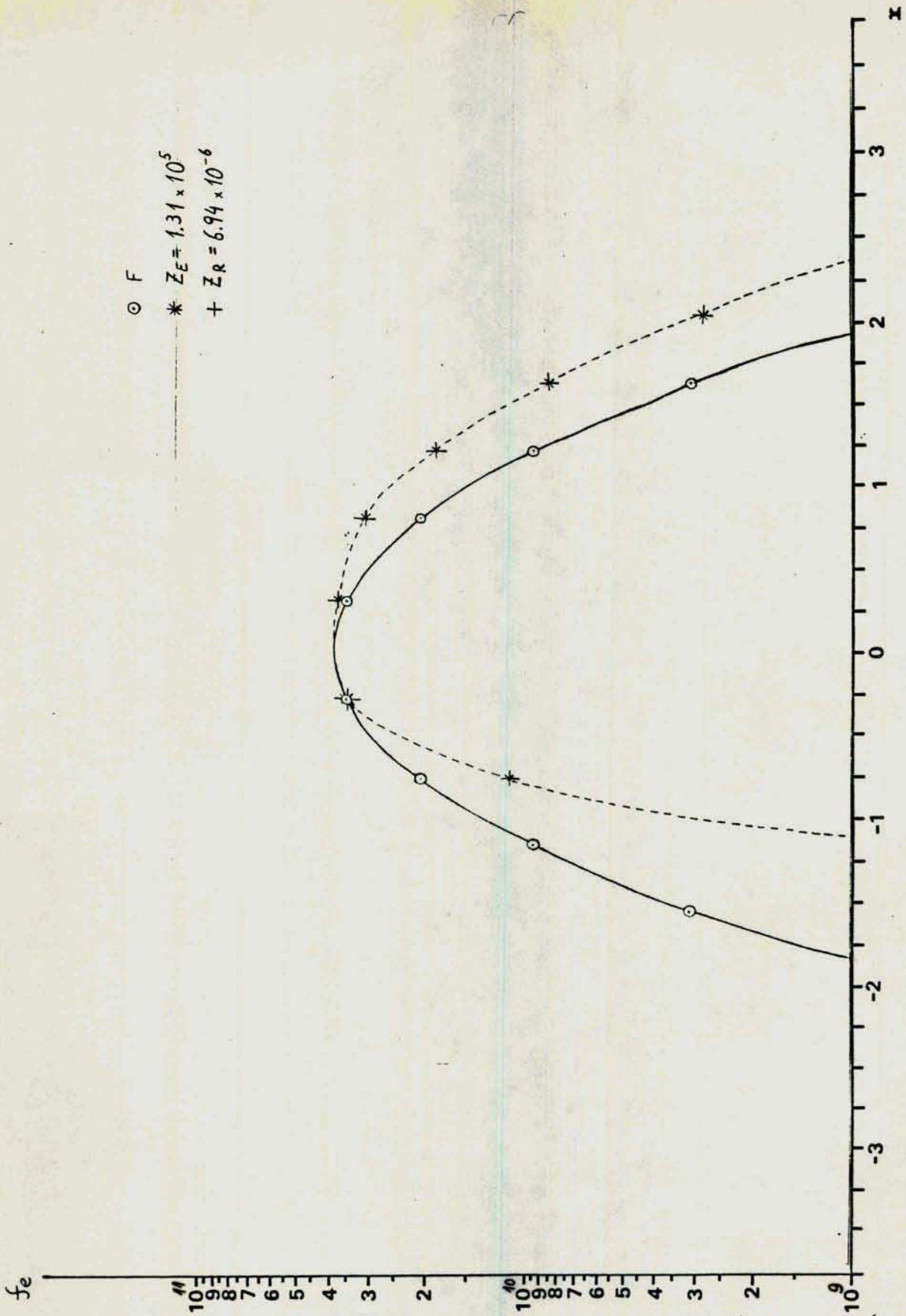


Figura 10b

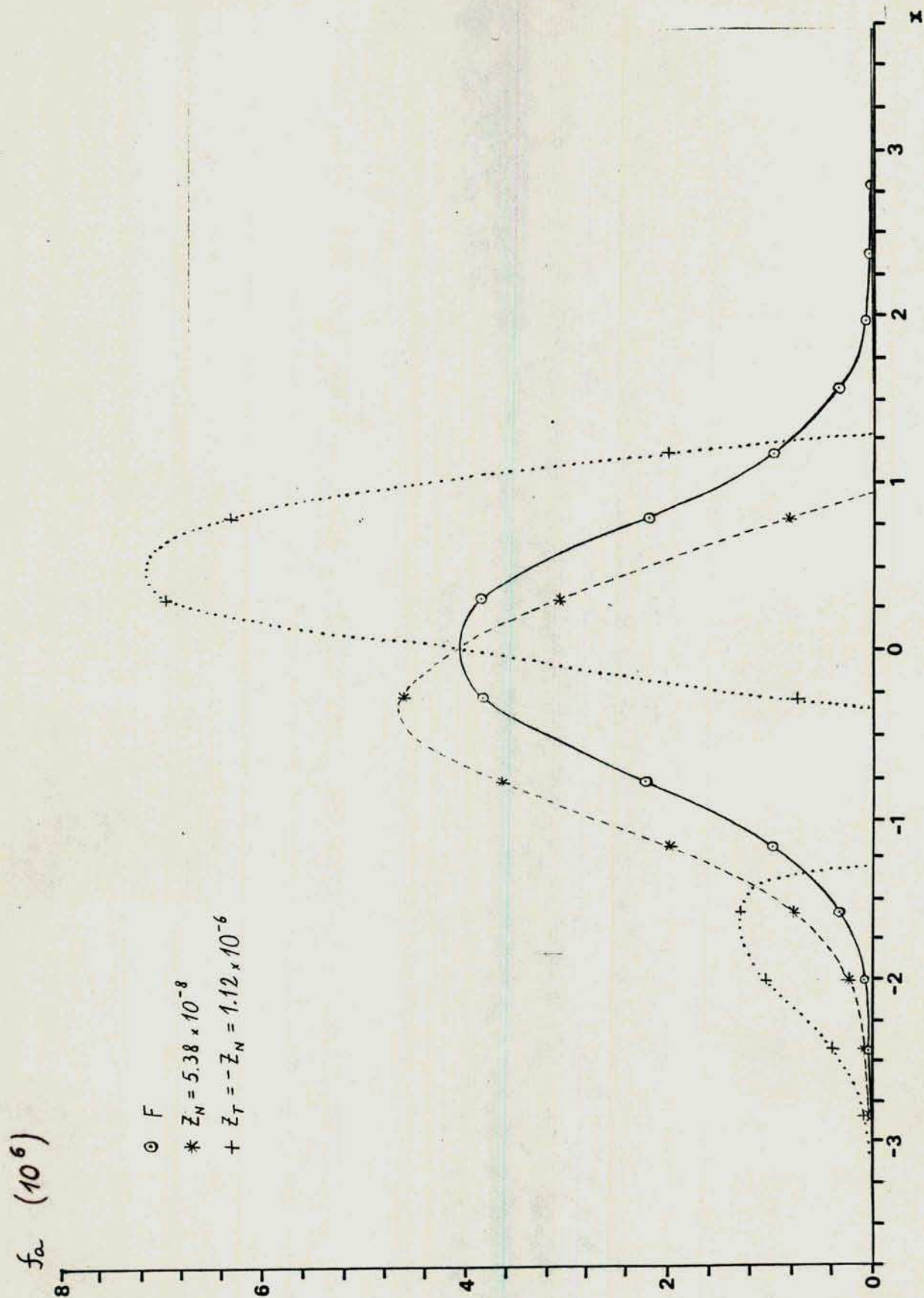


Figura 10c

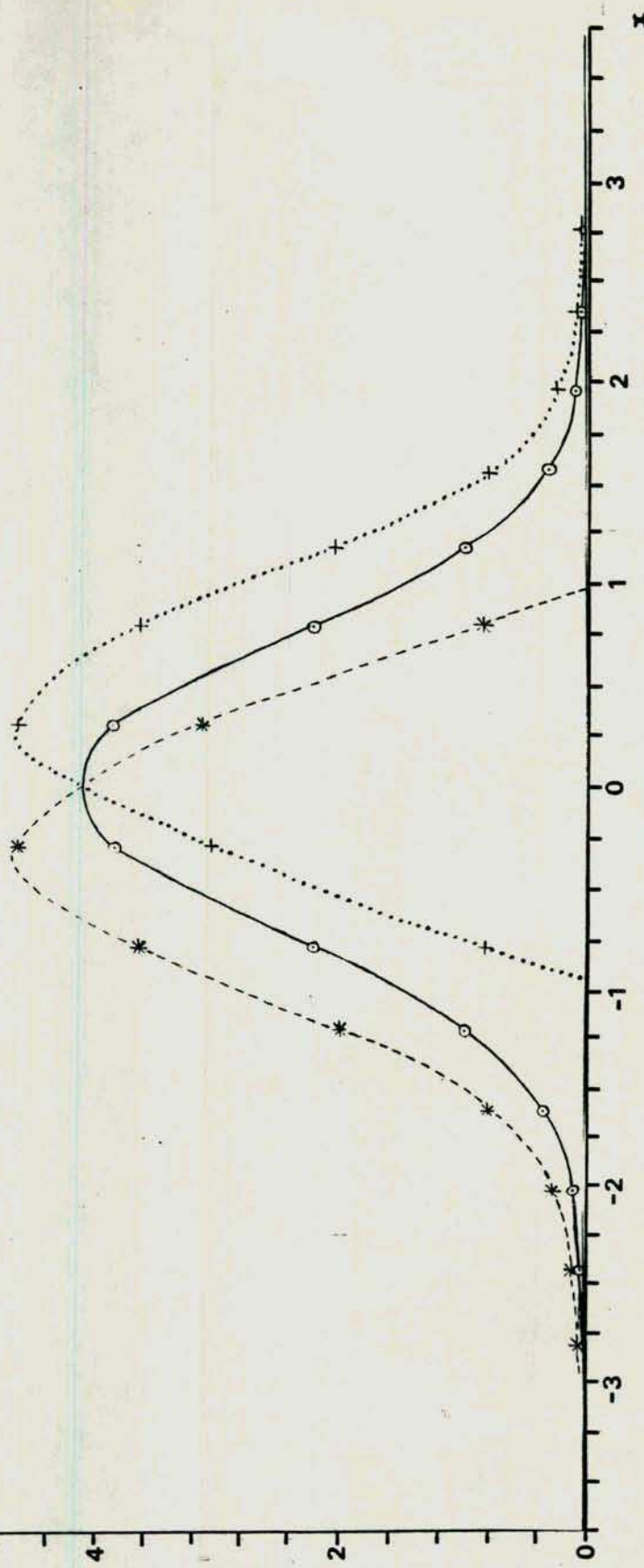
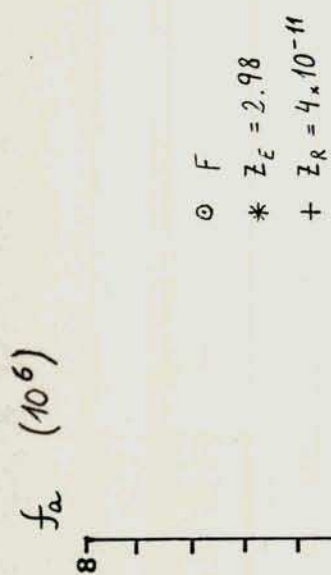


Figura 10d

TABLAS

TABLA I

Secciones eficaces adoptadas para
colisiones electrón-átomo

| β/β_0 | a (\AA^2) | b | c |
|-----------------|----------------------|--------|--------|
| 0.01 | 60.7 | - | - |
| 0.05 | 50.9 | - | - |
| 0.1 | 48.8 | -0.072 | 0.0015 |
| 0.2 | 38.2 | - | - |
| 0.3 | 28.0 | -0.114 | 0.013 |
| 0.4 | 19.8 | - | - |
| 0.5 | 13.8 | -0.028 | 0.014 |
| 0.75 | 5.9 | +0.060 | 0.012 |
| 1.0 | 2.8 | +0.14 | 0.021 |

TABLA II

Secciones eficaces adoptadas para colisiones
átomo-átomo

| $E(\text{eV})$ | $\sigma_{\text{tot}} (\text{\AA}^2)$ | $\theta(^{\circ})$ | $\frac{d\sigma}{d\omega} (\text{\AA}^2)$ |
|----------------|--------------------------------------|--------------------|--|
| 0 | 50 | 0 | 60 |
| 0.0025 | 100 | 20 | 40 |
| 0.01 | 60 | 40 | 6 |
| 0.05 | 70 | 60 | 7 |
| 0.2 | 50 | 80 | 1 |
| 0.3 | 60 | 110 | 2 |
| | | 120 | 5 |
| | | 140 | 3 |
| | | 160 | 5 |
| | | 180 | 10 |

$(E = 0.004 \text{ eV})$

TABLA III

Secciones eficaces adoptadas para colisiones
protón-átomo

| $E(\text{eV})$ | $\sigma_{\text{tot}} (\text{\AA}^2)$ | $\theta (^{\circ})$ | $\frac{d\sigma}{d\omega} (*)$ |
|----------------|--------------------------------------|---------------------|-------------------------------|
| 0.002 | 84 | 0 | 10^5 |
| 0.005 | 34 | 15 | 2.8×10^3 |
| 0.01 | 28 | 30 | 5.6×10^2 |
| 0.1 | — | 60 | 56 |
| 1 | 14 | 90 | 28 |
| 5 | 11 | 120 | 56 |
| | | 150 | 1.4×10^2 |
| | | 180 | 5.6×10^2 |

(*) variación relativa

$(E = 0.013 \text{ eV})$

TABLA IV a

Parámetros macroscópicos básicos

Código : B3S

{ E - caso ETL , o sea $W = 1$; $T_R = T$
 S - caso solar , o sea $W = 2.2 \times 10^{-3}$
 $T_R = 8000^\circ K$

presión

{ 1 — $p = 10^{-2}$ dina cm^{-2}
 2 — $p = 10^{-1}$ " "
 3 — $p = 1$ " "
 4 — $p = 10$ " "
 5 — $p = 10^2$ " "

temperatura

{ A — $T = 5 \times 10^3$ °K
 B — $T = 6 \times 10^3$ °K
 C — $T = 8 \times 10^3$ °K
 D — $T = 10^4$ °K
 E — $T = 1.25 \times 10^4$ °K
 F — $T = 1.5 \times 10^4$ °K
 G — $T = 2 \times 10^4$ °K

TABLA IV b

Otros parámetros macroscópicos

| | 230 | 330 | 430 | 1SS | 2SS | |
|--------------------------------|-----|---------|---------|---------|---------|---------|
| m_e | A | 1.61E9 | 5.12E9 | 1.62E10 | 5.49E9 | 2.77E10 |
| | B | 1.93E10 | 6.97E10 | 2.30E11 | 4.81E9 | 2.56E10 |
| | C | 4.51E10 | 4.34E11 | 3.37E12 | 3.85E9 | 2.23E10 |
| | D | 3.63E10 | 3.62E11 | 3.60E12 | 3.20E9 | 1.99E10 |
| | E | 2.90E10 | 2.90E11 | 2.89E12 | 2.64E9 | 1.76E10 |
| | F | 2.41E10 | 2.41E11 | 2.41E12 | 2.25E9 | 1.58E10 |
| | G | 2.07E10 | 2.07E11 | 2.07E12 | 1.95E9 | 1.28E10 |
| | H | 1.81E10 | 1.81E11 | 1.81E12 | 1.72E9 | 1.31E10 |
| l_D | A | 1.22E-2 | 6.84E-3 | 3.84E-3 | 6.60E-3 | 2.94E-3 |
| | B | 3.86E-3 | 2.03E-3 | 1.12E-3 | 7.73E-3 | 3.35E-3 |
| | C | 2.91E-3 | 9.40E-4 | 3.37E-4 | 9.98E-3 | 4.14E-3 |
| | D | 3.63E-3 | 1.15E-3 | 3.64E-4 | 1.22E-2 | 4.90E-3 |
| | E | 4.54E-3 | 1.44E-3 | 4.55E-4 | 1.50E-2 | 5.83E-3 |
| | F | 5.45E-3 | 1.72E-3 | 5.45E-4 | 1.79E-2 | 6.75E-3 |
| | G | 6.36E-3 | 2.01E-3 | 6.36E-4 | 2.07E-2 | 7.65E-3 |
| | H | 7.27E-3 | 2.30E-3 | 7.27E-4 | 2.36E-2 | 8.55E-3 |
| $\left(\frac{m_a}{m_e}\right)$ | A | 8.82E1 | 2.81E2 | 8.91E2 | 6.40E-1 | 3.23E0 |
| | B | 4.25E0 | 1.53E1 | 5.05E1 | 5.34E-1 | 2.72E0 |
| | C | 9.14E-3 | 8.79E-2 | 6.84E-1 | 3.74E-1 | 2.06E0 |
| | D | 1.03E-4 | 1.03E-3 | 1.02E-2 | 2.64E-1 | 1.64E0 |
| | E | 2.53E-6 | 2.53E-5 | 2.52E-4 | 1.95E-1 | 1.30E0 |
| | F | 1.56E-7 | 1.96E-6 | 1.96E-5 | 1.51E-1 | 1.06E0 |
| | G | 2.99E-8 | 2.99E-7 | 2.99E-6 | 1.22E-1 | 8.92E-1 |
| | H | 6.94E-9 | 6.94E-8 | 6.94E-7 | 1.00E-1 | 7.63E-1 |

TABLA V

Coeficientes de transporte Ω ab

| | TRANSPORTE | VLOG(N1) | VLOG(N2) | VLOG(N3) | VLOG(W) | VLOGIN 1 | VBO | VLOG(IT) | E4 | VLOG(ITR) |
|-------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| A 2 E | DIFUSIVO 1 | -7.724E+18 | -4.957E+16 | 1.209E+19 | 1.564E+18 | 4.320E+14 | 7.228E+23 | -7.218E+18 | 2.565E+12 | 3.446E+19 |
| | DIFUSIVO 2 | -7.654E+16 | -1.120E+17 | 2.368E+19 | 1.521E+16 | 2.349E+19 | 1.441E+24 | 1.226E+19 | -1.183E+10 | 3.351E+17 |
| | DIFUSIVO 3 | 1.082E+19 | 1.583E+19 | 3.603E+21 | -2.237E+18 | 3.630E+21 | 2.214E+26 | 1.854E+21 | 1.672E+12 | -4.928E+19 |
| | DIFUSIVO 4 | 4.338E+05 | 2.312E+05 | -4.779E+07 | -1.736E+23 | -4.713E+07 | -2.907E+12 | -2.451E+07 | -6.770E-02 | -3.826E+24 |
| | DIFUSIVO T | 3.022E+18 | 1.566E+19 | 3.639E+21 | -6.573E+17 | 3.657E+21 | 2.235E+26 | 1.359E+21 | 4.225E+12 | -1.448E+19 |
| | MASA | 1.797E-05 | 2.628E-05 | 6.066E-03 | -3.714E-06 | 6.110E-03 | 3.726E+02 | 3.122E-03 | 2.779E-12 | -8.183E-09 |
| | IMPULSO PZ | 1.812E+C1 | 2.699E+01 | 6.163E+03 | -6.813E+01 | 6.208E+03 | 3.740E+08 | 2.552E+03 | 2.566E-C6 | -1.501E+03 |
| | F.CINETICA | 2.686E+06 | 2.729E+C7 | 6.265E+C9 | -6.221E+05 | 6.295E+05 | 3.791E+14 | 2.780E+09 | 8.223E+00 | -1.371E+07 |
| | Q.ELECTRIC | 7.648E+13 | -6.239E+16 | 1.159E+19 | -1.549E+18 | 1.917E+15 | 7.177E+23 | 1.948E+16 | -2.577E+12 | -3.413E+19 |
| | E.INTERNA | -2.352E+C8 | -3.439E+08 | -7.629E+10 | 4.860E+07 | -7.887E+10 | -4.810E+15 | -4.030E+10 | -3.634E+C1 | 1.071E+09 |
| B 2 E | F.RADIANTE | 2.952E+05 | 1.588E+05 | -3.281E+07 | -7.917E+22 | -3.235E+C7 | -1.995E+12 | -1.682E+07 | -4.558E-02 | -1.744E+24 |
| | DIFUSIVO 1 | -1.612E+19 | -4.146E+17 | 1.814E+18 | 8.947E+18 | -1.472E+15 | 4.355E+22 | -3.018E+19 | 4.375E+12 | 1.643E+20 |
| | DIFUSIVO 2 | -6.117E+17 | -7.761E+17 | 2.633E+18 | 3.394E+17 | 6.751E+17 | 5.633E+22 | -5.043E+17 | -4.578E+10 | 6.231E+18 |
| | DIFUSIVO 3 | 1.005E+20 | 1.256E+20 | 4.544E+21 | -5.593E+19 | 4.770E+21 | 2.672E+26 | 2.607E+21 | 6.997E+12 | -1.027E+21 |
| | DIFUSIVO 4 | 4.488E+C7 | 3.670E+07 | -9.869E+07 | -5.709E+23 | -1.712E+07 | -2.702E+12 | 4.022E+07 | -2.278E+C0 | -1.048E+25 |
| | DIFUSIVO T | 8.376E+19 | 1.244E+20 | 4.548E+21 | -4.664E+19 | 4.756E+21 | 2.673E+26 | 2.576E+21 | 1.123E+13 | -8.564E+20 |
| | MASA | 1.671E-04 | 2.038E-04 | 7.604E-03 | -9.256E-C5 | 7.979E-03 | 4.470E+02 | 4.260E-03 | 1.163E-11 | -1.170E-03 |
| | IMPULSO PZ | 1.859E+02 | 2.334E+02 | 8.512E+03 | -3.152E+02 | 8.931E+03 | 4.958E+08 | 4.634E+03 | 1.321E-C5 | -5.787E+03 |
| | F.CINETICA | 1.677E+08 | 2.604E+08 | 9.526E+C9 | -9.337E+C7 | 9.564E+05 | 5.541E+14 | 4.849E+09 | 2.582E+01 | -1.715E+09 |
| | Q.ELECTRIC | 1.551E+19 | -3.615E+17 | 2.490E+17 | -8.608E+18 | 1.540E+15 | 1.279E+22 | 3.037E+19 | -4.421E+12 | -1.580E+20 |
| C 2 E | E.INTERNA | -2.184E+09 | -2.730E+09 | -9.874E+10 | 1.215E+C9 | -1.037E+11 | -5.807E+15 | -5.665E+10 | -1.520E+C2 | 2.231E+10 |
| | E.RADIANTE | 3.095E+07 | 2.531E+07 | -6.805E+07 | -2.603E+23 | -1.180E+C7 | -1.863E+12 | 2.805E+07 | -1.571E+00 | -4.178E+24 |
| | DIFUSIVO 1 | -3.395E+19 | -1.319E+18 | -1.232E+16 | 5.967E+20 | -3.530E+15 | -1.416E+23 | -6.813E+19 | 6.816E+12 | 8.218E+21 |
| | DIFUSIVO 2 | -1.777E+18 | -2.237E+18 | -1.776E+16 | 3.124E+19 | -4.031E+18 | -1.485E+23 | -4.169E+18 | -9.606E+10 | 4.302E+20 |
| | DIFUSIVO 3 | -3.697E+20 | -4.739E+20 | -1.637E+19 | 6.500E+21 | -8.600E+20 | -3.166E+25 | -8.950E+20 | -2.178E+13 | 8.953E+22 |
| | DIFUSIVO 4 | 6.230E+10 | 5.878E+10 | 5.218E+08 | -2.411E+25 | 1.216E+11 | 3.933E+15 | 1.235E+11 | -1.341E+C2 | -3.320E+26 |
| | DIFUSIVO T | -4.054E+20 | -4.775E+20 | -1.640E+19 | 7.128E+21 | -8.993E+20 | -3.195E+25 | -9.673E+20 | -1.504E+13 | 9.818E+22 |
| | MASA | -6.213E-04 | -7.964E-04 | -2.741E-05 | 1.092E-02 | -1.445E-03 | -5.319E+01 | -1.504E-03 | -3.659E-11 | 1.505E-01 |
| | IMPULSO PZ | -8.915E+C2 | -1.139E+03 | -3.880E+01 | 6.736E+03 | -2.069E+03 | -7.707E+07 | -2.214E+03 | -5.171E-05 | 9.281E+04 |
| | F.CINETICA | -1.399E+09 | -1.646E+09 | -5.554E+C7 | 2.460E+10 | -3.101E+05 | -1.121E+14 | -3.608E+09 | -5.157E+01 | 3.389E+11 |
| D 2 E | Q.ELECTRIC | 3.218E+19 | -9.179E+17 | -5.437E+15 | -5.655E+20 | 3.126E+19 | -6.965E+21 | 6.356E+19 | -6.912E+12 | -7.788E+21 |
| | E.INTERNA | 8.032E+09 | 1.030E+10 | 3.558E+C8 | -1.412E+11 | 1.869E+10 | 6.878E+14 | 1.945E+10 | 4.744E+C2 | -1.945E+12 |
| | E.RADIANTE | 4.359E+10 | 4.108E+10 | 3.650E+08 | -1.099E+25 | 8.503E+10 | 2.749E+15 | 8.650E+10 | -5.237E+02 | -1.514E+26 |
| | DIFUSIVO 1 | -5.650E+19 | -1.640E+18 | -4.640E+12 | 1.549E+22 | -5.816E+15 | -1.780E+23 | -1.133E+20 | 9.167E+12 | 1.707E+23 |
| | DIFUSIVO 2 | -2.315E+19 | -2.902E+18 | -5.658E+12 | 6.347E+20 | -5.217E+18 | -1.708E+23 | -5.485E+18 | -9.816E+10 | 6.992E+21 |
| | DIFUSIVO 3 | -1.950E+19 | -2.425E+19 | -5.265E+15 | 5.353E+21 | -4.376E+19 | -1.426E+24 | -4.550E+19 | -7.949E+11 | 5.902E+22 |
| | DIFUSIVO 4 | 9.144E+12 | 7.954E+12 | 1.673E+08 | -4.702E+26 | 1.710E+13 | 4.721E+17 | 1.711E+13 | -1.989E+05 | -5.180E+27 |
| | DIFUSIVO T | -7.931E+19 | -2.880E+19 | -5.275E+15 | 2.148E+22 | -1.071E+20 | -1.775E+24 | -1.643E+20 | 8.214E+12 | 2.367E+23 |
| | MASA | -3.653E-05 | -4.542E-05 | -8.815E-09 | 1.003E-C2 | -8.196E-05 | -2.671E+00 | -8.538E-05 | -1.485E-12 | 1.106E-01 |
| | IMPULSO PZ | -5.753E+01 | -8.733E+01 | -1.283E-02 | -1.586E+05 | -1.248E+02 | -4.078E+06 | -1.337E+02 | -1.631E-06 | -1.747E+06 |
| | F.CINETICA | -3.200E+08 | -1.023E+08 | -1.830E+04 | 8.779E+10 | -4.226E+08 | -6.634E+12 | -8.806E+08 | 3.628E+C1 | 9.674E+11 |
| | Q.ELECTRIC | 5.418E+19 | -1.262E+18 | -1.019E+12 | -1.486E+22 | 5.294E+15 | 7.202E+21 | 1.078E+20 | -9.265E+12 | -1.637E+23 |
| | E.INTERNA | 4.237E+09 | 5.270E+08 | 1.144E+05 | -1.163E+11 | 9.508E+08 | 3.098E+13 | 9.887E+08 | 1.727E+01 | -1.282E+12 |
| | E.RADIANTE | 6.499E+12 | 5.657E+12 | 1.209E+08 | -2.144E+26 | 1.216E+13 | 3.358E+17 | 1.226E+13 | -1.408E+05 | -2.362E+27 |
| | | | | | | | | | | |

| | TRANSPORTE | VLOG(N1) | VLOG(N2) | VLOG(N3) | VLOG(W) | VLOG(N) | VBO | VLOG(T) | EZ | VLOG(IA) |
|-------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| E 2 E | DIFUSIVO 1 | -9.484E+19 | -2.729E+18 | 5.075E+10 | 2.361E+23 | -9.756E+19 | -2.664E+23 | -1.910E+20 | 1.231E+13 | 2.061E+24 |
| | DIFUSIVO 2 | -3.865E+18 | -4.852E+18 | 1.017E+11 | 9.620E+21 | -8.717E+18 | -2.561E+23 | -1.053E+19 | -1.320E+11 | 8.480E+22 |
| | DIFUSIVO 3 | -1.139E+18 | -1.413E+18 | -4.252E+12 | 2.843E+21 | -2.552E+18 | -7.461E+22 | -3.058E+18 | -3.615E+10 | 2.511E+22 |
| | DIFUSIVO 4 | 7.807E+14 | 6.135E+14 | 1.789E+08 | -5.336E+27 | 1.394E+15 | 3.277E+19 | 1.633E+15 | -2.235E+07 | -4.703E+28 |
| | DIFUSIVO T | -9.995E+19 | -8.994E+18 | -4.100E+12 | 2.486E+23 | -1.088E+20 | -5.971E+23 | -2.046E+20 | 1.214E+13 | 2.191E+24 |
| | MASA | -8.454E-04 | -1.048E-05 | -6.942E-12 | 2.106E-02 | -1.894E-05 | -5.533E-01 | -2.297E-05 | -2.710E-13 | 1.857E-01 |
| | IMPULSO PZ | -2.056E+01 | -1.750E+01 | -1.103E-05 | -1.927E+06 | -3.805E+01 | -9.616E+05 | -3.672E+01 | 4.091E-07 | -1.699E+07 |
| | E.CINETICA | -5.311E+03 | -3.897E+07 | -1.689E+01 | 1.322E+12 | -5.697E+08 | -2.838E+12 | -1.568E+09 | 6.579E+01 | 1.166E+13 |
| | Q.ELECTRIC | 9.098E+19 | -2.123E+18 | 5.052E+10 | -2.265E+23 | 8.984E+19 | 1.033E+22 | 1.805E+20 | -1.245E+13 | -1.957E+24 |
| | E.INTERNA | 2.474E+07 | 3.071E+07 | 9.240E+01 | -6.178E+10 | 5.545E+07 | 1.621E+12 | 6.731E+07 | 7.985E-01 | -5.456E+11 |
| | E.RADIANTE | 5.684E+14 | 4.468E+14 | 1.350E+09 | -2.433E+27 | 1.015E+15 | 2.387E+19 | 1.210E+15 | -1.626E+07 | -2.145E+28 |
| F 2 F | DIFUSIVO 1 | -1.450E+20 | -4.126E+18 | -6.077E+07 | 1.572E+24 | -1.491E+20 | -3.694E+23 | -2.910E+20 | 1.569E+13 | 1.158E+25 |
| | DIFUSIVO 2 | -5.862E+19 | -7.367E+17 | -9.439E+07 | 6.358E+22 | -1.223E+15 | -3.538E+23 | -1.385E+19 | -1.677E+11 | 4.681E+23 |
| | DIFUSIVO 3 | -1.767E+17 | -2.194E+17 | -3.315E+10 | 1.927E+21 | -3.961E+17 | -1.054E+22 | -4.157E+17 | -4.742E+05 | 1.424E+22 |
| | DIFUSIVO 4 | 1.748E+16 | 1.263E+16 | 2.201E+09 | -2.787E+28 | 3.012E+16 | 6.158E+20 | 3.089E+16 | -5.400E+08 | -2.050E+29 |
| | DIFUSIVO T | -1.510E+20 | -1.171E+19 | -3.329E+10 | 1.638E+24 | -1.627E+20 | -7.337E+23 | -3.053E+20 | 1.552E+13 | 1.206E+25 |
| | MASA | -1.023E-05 | -1.269E-05 | -5.559E-14 | 1.110E-01 | -2.292E-05 | -6.098E-01 | -2.412E-05 | -2.741E-13 | 8.172E-01 |
| | IMPULSO PZ | -2.950E+01 | -2.320E+01 | -9.857E-08 | -1.003E+07 | -5.271E+01 | -1.162E+06 | -7.074E+01 | 7.021E-07 | -7.131E+07 |
| | E.CINETICA | -9.660E+08 | -5.996E+07 | -1.721E-01 | 1.048E+13 | -1.026E+09 | -4.173E+12 | -2.823E+09 | 1.609E+02 | 7.714E+13 |
| | Q.ELECTRIC | 1.391E+20 | -3.241E+18 | -2.363E+07 | -1.509E+24 | 1.359E+20 | 1.551E+22 | 2.772E+20 | -1.586E+13 | -1.111E+25 |
| | E.INTERNA | 3.839E+06 | 4.769E+06 | 7.203E-01 | -4.188E+10 | 8.608E+06 | 2.291E+11 | 9.023E+06 | 1.035E-01 | -3.094E+11 |
| | E.RADIANTE | 1.294E+16 | 9.398E+15 | 1.721E+08 | -1.272E+28 | 2.233E+16 | 4.577E+20 | 2.331E+16 | -3.956E+08 | -9.365E+28 |
| G 2 G | DIFUSIVO 1 | -2.077E+20 | -5.912E+18 | -3.453E+06 | 6.585E+24 | -2.136E+20 | -4.904E+23 | -4.171E+20 | 1.927E+13 | 4.228E+25 |
| | DIFUSIVO 2 | -8.390E+18 | -1.055E+19 | -5.490E+06 | 2.660E+23 | -1.894E+19 | -4.693E+23 | -1.985E+19 | -2.065E+11 | 1.707E+24 |
| | DIFUSIVO 3 | -4.836E+16 | -6.020E+16 | -9.454E+08 | 1.543E+21 | -1.086E+17 | -2.678E+21 | -1.141E+17 | -1.130E+09 | 9.946E+21 |
| | DIFUSIVO 4 | 1.394E+17 | 9.845E+16 | 1.849E+08 | -9.417E+28 | 2.379E+17 | 4.444E+21 | 2.357E+17 | -3.913E+09 | -5.999E+29 |
| | DIFUSIVO T | -2.162E+20 | -1.652E+19 | -9.543E+08 | 6.853E+24 | -2.327E+20 | -9.624E+23 | -4.371E+20 | 1.906E+13 | 4.400E+25 |
| | MASA | -1.430E-05 | -1.776E-05 | -1.590E-15 | 4.534E-01 | -3.206E-05 | -7.899E-01 | -3.377E-05 | -3.298E-13 | 2.911E+00 |
| | IMPULSO PZ | -4.498E+01 | -3.508E+01 | -3.050E-09 | -3.388E+07 | -8.006E+01 | -1.627E+06 | -1.081E+02 | 9.453E-07 | -2.176E+08 |
| | E.CINETICA | -1.615E+09 | -9.975E+07 | -5.773E-03 | 5.119E+13 | -1.713E+05 | -6.400E+12 | -4.726E+09 | 1.448E+02 | 3.288E+14 |
| | Q.ELECTRIC | 1.993E+20 | -4.641E+18 | -2.037E+06 | -6.319E+24 | 1.547E+20 | 2.105E+22 | 3.973E+20 | -1.948E+13 | -4.058E+25 |
| | E.INTERNA | 1.051E+06 | 1.308E+06 | 2.054E-02 | -3.353E+10 | 2.359E+06 | 5.818E+10 | 2.479E+06 | -2.455E-02 | -2.161E+11 |
| | E.RADIANTE | 1.041E+17 | 7.414E+16 | 1.491E+08 | -4.338E+28 | 1.782E+17 | 3.346E+21 | 1.809E+17 | -2.861E+09 | -2.785E+29 |
| H 2 H | DIFUSIVO 1 | -2.839E+20 | -8.096E+18 | -1.755E+06 | 2.114E+25 | -2.920E+20 | -6.287E+23 | -5.702E+20 | 2.304E+13 | 1.245E+26 |
| | DIFUSIVO 2 | -1.145E+19 | -1.442E+19 | -1.756E+05 | 8.528E+23 | -2.587E+15 | -5.998E+23 | -2.713E+19 | -2.475E+11 | 5.022E+24 |
| | DIFUSIVO 3 | -1.869E+16 | -2.337E+16 | -6.157E+07 | 1.398E+21 | -4.206E+16 | -9.723E+20 | -4.414E+16 | -3.905E+08 | 9.250E+21 |
| | DIFUSIVO 4 | 4.782E+17 | 7.189E+17 | 9.372E+07 | -2.462E+29 | 7.569E+17 | 1.348E+22 | 7.516E+17 | -1.332E+10 | -1.412E+30 |
| | DIFUSIVO T | -2.954E+20 | -2.253E+19 | -6.350E+07 | 2.199E+25 | -3.179E+20 | -1.229E+24 | -5.974E+20 | 2.279E+13 | 1.295E+26 |
| | MASA | -1.944E-05 | -2.416E-05 | -1.033E-16 | 1.448E+00 | -4.360E-05 | -1.005E+00 | -4.556E-05 | -3.936E-13 | 8.526E+00 |
| | IMPULSO PZ | -6.553E+01 | -5.104E+01 | -2.116E-10 | -8.955E+07 | -1.166E+02 | -2.215E+06 | -1.577E+02 | 1.210E-06 | -5.302E+03 |
| | E.CINETICA | -2.524E+09 | -1.543E+08 | -4.613E-04 | 1.879E+14 | -2.678E+05 | -9.379E+12 | -7.353E+09 | 1.579E+02 | 1.107E+15 |
| | Q.ELECTRIC | 2.724E+20 | -4.319E+18 | -1.580E+06 | -2.028E+25 | 2.661E+20 | 2.891E+22 | 5.431E+20 | -2.329E+13 | -1.194E+26 |
| | E.INTERNA | 4.062E+05 | 5.077E+05 | 1.338E-03 | -3.037E+10 | 9.139E+05 | 2.113E+10 | 9.551E+05 | 8.466E-03 | -1.793E+11 |
| | E.RADIANTE | 3.563E+17 | 2.411E+17 | 7.837E+07 | -1.164E+29 | 5.973E+17 | 1.019E+22 | 5.726E+17 | -5.624E+05 | -6.857E+29 |

| TRANSORTE | VLOG(N1) | VLOG(N2) | VLOG(N3) | VLOG(W) | VLOG(N) | V80 | VLOG(T) | EZ | VLOG(TH) |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| REFUSIVO 1 | -6.153E+18 | -1.810E+17 | 2.340E+17 | 3.989E+17 | -6.318E+18 | -8.671E+21 | -1.011E+19 | 2.063E+12 | 8.789E+18 |
| REFUSIVO 2 | -2.574E+17 | -4.574E+17 | 3.032E+17 | 1.585E+16 | -4.450E+17 | -1.476E+22 | -9.306E+17 | -6.856E+10 | 3.492E+17 |
| REFUSIVO 3 | 9.260E+17 | 1.693E+18 | 1.693E+18 | -6.424E+16 | 1.585E+21 | 1.335E+26 | 3.057E+21 | 3.563E+11 | -1.415E+18 |
| REFUSIVO 4 | 1.529E+05 | 2.645E+05 | -1.763E+05 | -5.383E+22 | 2.585E+05 | 9.482E+09 | 5.331E+05 | 3.867E+02 | -1.186E+24 |
| REFUSIVO Y | -5.640E+18 | 1.055E+19 | 1.583E+21 | 3.505E+17 | 1.579E+21 | 1.335E+26 | 3.056E+21 | 2.250E+12 | 7.722E+18 |
| WASA | 1.121E+06 | 2.066E+06 | 2.647E+03 | -8.059E+08 | 2.651E+03 | 2.233E+02 | 5.178E+03 | 3.159E+13 | -1.775E+04 |
| IMPULSO PZ | 9.006E+01 | 2.002E+01 | -2.670E+03 | -2.002E+01 | -2.673E+03 | 2.234E+08 | 5.119E+03 | 3.954E+07 | -4.422E+02 |
| E.CINETICA | -1.168E+07 | 1.609E+06 | -2.652E+09 | 7.228E+05 | -2.682E+09 | 2.245E+14 | 5.035E+09 | 4.467E+00 | 1.593E+07 |
| E.ELECTRIC | 6.101E+18 | -2.766E+17 | 7.415E+16 | 3.830E+17 | 5.873E+18 | -6.084E+21 | 9.177E+18 | -2.131E+12 | -8.439E+18 |
| E.INTERNA | -2.012E+07 | -3.679E+07 | -3.439E+10 | 1.398E+06 | -3.445E+10 | -2.902E+15 | -6.729E+10 | -5.565E+00 | 3.076E+07 |
| E.RADIANTE | 1.043E+05 | 1.944E+05 | -1.224E+05 | -2.455E+22 | 1.773E+05 | 5.866E+09 | 3.663E+05 | 2.678E+02 | -5.408E+23 |
| REFUSIVO 1 | -1.664E+19 | -4.649E+17 | 1.209E+18 | 2.557E+18 | -1.579E+19 | 3.455E+22 | -2.960E+19 | 4.504E+12 | 4.695E+19 |
| REFUSIVO 2 | -6.569E+17 | -9.533E+17 | 1.693E+19 | 1.010E+17 | 4.795E+17 | 3.749E+22 | 2.269E+18 | -5.466E+10 | 1.854E+18 |
| REFUSIVO 3 | 1.760E+19 | 1.620E+19 | 1.803E+21 | -1.954E+18 | 1.832E+21 | 1.400E+26 | 3.531E+21 | 1.002E+12 | -3.588E+19 |
| REFUSIVO 4 | 7.874E+06 | 1.008E+07 | -2.245E+07 | -1.581E+23 | -5.496E+06 | -1.027E+12 | -2.636E+07 | 6.154E+01 | -2.903E+24 |
| REFUSIVO Y | -4.696E+19 | 1.488E+19 | 1.806E+21 | 7.039E+17 | 1.816E+21 | 1.402E+26 | 3.564E+21 | 5.451E+12 | 1.292E+19 |
| WASA | 1.996E+05 | 2.566E+05 | 3.019E+03 | -3.097E+06 | 3.064E+03 | 2.344E+02 | 5.910E+03 | 1.588E+12 | -5.686E+05 |
| IMPULSO PZ | 2.120E+01 | 2.937E+01 | 3.744E+03 | -6.194E+01 | 3.393E+03 | 2.576E+08 | 6.424E+03 | 1.572E+06 | -1.137E+03 |
| E.CINETICA | -1.178E+07 | 3.056E+17 | 3.703E+09 | 2.695E+06 | 3.716E+09 | 2.843E+14 | 6.877E+09 | 1.344E+01 | 4.949E+07 |
| E.ELECTRIC | 1.699E+19 | -3.884E+17 | 6.838E+17 | -2.456E+18 | 1.627E+19 | 5.294E+22 | 3.187E+19 | -4.559E+12 | -4.510E+19 |
| E.INTERNA | -2.734E+08 | -3.520E+08 | -3.917E+10 | 4.246E+07 | -3.980E+10 | -3.043E+15 | -7.673E+10 | -2.176E+01 | 7.796E+08 |
| E.RADIANTE | 5.422E+06 | 6.958E+06 | -1.183E+07 | -7.211E+22 | -3.794E+06 | -7.094E+11 | -1.819E+07 | 4.250E+01 | -1.324E+24 |
| REFUSIVO 1 | -3.869E+19 | -2.357E+18 | -3.556E+17 | 7.066E+19 | -4.141E+19 | -2.415E+23 | -7.862E+19 | 7.588E+12 | 9.731E+20 |
| REFUSIVO 2 | -2.184E+18 | -4.088E+18 | -5.894E+17 | 5.816E+18 | -7.781E+18 | 3.069E+23 | -8.950E+18 | -1.722E+11 | 8.011E+19 |
| REFUSIVO 3 | -6.682E+20 | -8.485E+20 | -2.405E+20 | 1.221E+21 | -1.757E+21 | -7.274E+25 | -2.152E+21 | 3.767E+13 | 1.682E+22 |
| REFUSIVO 4 | 7.257E+09 | 9.195E+09 | 1.260E+09 | -2.506E+24 | 1.781E+10 | 7.046E+14 | 2.051E+10 | 4.048E+02 | -3.451E+25 |
| REFUSIVO Y | -7.100E+20 | -8.569E+20 | -2.414E+20 | 1.298E+21 | -1.806E+21 | -7.339E+25 | -2.239E+21 | -2.026E+13 | 1.787E+22 |
| WASA | -1.123E+03 | -1.426E+03 | -4.022E+04 | 2.052E+03 | -2.952E+03 | -1.222E+02 | -3.614E+03 | -6.329E+11 | 2.826E+02 |
| IMPULSO PZ | 1.624E+09 | -2.059E+03 | -5.795E+02 | -2.038E+03 | -4.262E+03 | -1.779E+08 | -5.321E+03 | -9.079E+05 | 2.808E+04 |
| E.CINETICA | -2.449E+09 | -2.047E+09 | -8.250E+08 | 4.475E+09 | -6.222E+09 | -2.555E+14 | -8.106E+09 | -1.041E+02 | 6.164E+10 |
| E.ELECTRIC | 3.549E+19 | -1.651E+18 | -2.287E+17 | -6.485E+19 | 3.362E+19 | -6.537E+22 | 6.967E+19 | -7.760E+12 | -8.929E+20 |
| E.INTERNA | 1.452E+10 | 1.844E+10 | 5.255E+09 | -2.653E+10 | 3.819E+10 | 1.581E+15 | 4.676E+10 | 9.182E+02 | -3.655E+11 |
| E.RADIANTE | 5.093E+09 | 6.437E+09 | 9.522E+08 | -1.143E+24 | 1.247E+10 | 4.933E+14 | 1.437E+10 | 2.828E+02 | -1.573E+25 |
| REFUSIVO 1 | -6.241E+19 | -2.273E+18 | -8.572E+14 | 1.744E+21 | -6.588E+19 | -2.256E+23 | -1.270E+20 | 1.021E+13 | 1.921E+22 |
| REFUSIVO 2 | -3.174E+18 | -3.862E+18 | -1.445E+15 | 8.735E+19 | -7.130E+18 | -2.342E+23 | -7.207E+18 | -1.313E+11 | 9.628E+20 |
| REFUSIVO 3 | -1.367E+20 | -2.413E+20 | -4.627E+17 | 5.360E+21 | -4.364E+20 | -1.433E+25 | -4.365E+21 | 3.789E+12 | 5.900E+22 |
| REFUSIVO 4 | 7.620E+11 | 9.461E+11 | 5.356E+08 | -4.715E+25 | 1.709E+12 | 5.976E+16 | 1.746E+12 | 3.076E+04 | -5.195E+20 |
| REFUSIVO Y | -2.612E+20 | -4.675E+20 | -4.675E+20 | 7.191E+21 | -5.092E+20 | -1.479E+25 | -6.207E+20 | 2.254E+12 | 7.926E+22 |
| WASA | -3.109E+04 | -4.102E+04 | -7.746E+07 | 9.112E+03 | -7.419E+04 | -8.259E+04 | -8.259E+04 | -1.324E+11 | 1.005E+01 |
| IMPULSO PZ | 5.193E+02 | -6.391E+02 | -6.391E+02 | -3.186E+03 | -1.160E+03 | -3.891E+07 | -1.371E+03 | -2.002E+05 | -3.500E+04 |
| E.CINETICA | -1.060E+09 | -9.969E+08 | -1.781E+06 | -2.918E+10 | -2.049E+09 | -6.096E+13 | -3.025E+09 | 1.227E+01 | 3.217E+11 |
| E.ELECTRIC | 6.023E+19 | -1.680E+18 | -5.470E+14 | -1.656E+21 | 5.856E+19 | 8.073E+21 | 1.597E+20 | -1.035E+13 | -1.825E+22 |
| E.INTERNA | 4.230E+00 | 5.243E+09 | 1.006E+07 | -1.165E+11 | 9.482E+05 | 3.114E+14 | 1.057E+10 | 1.693E+02 | -1.284E+12 |
| E.RADIANTE | 5.433E+11 | 6.744E+11 | 3.789E+08 | -2.150E+25 | 1.219E+12 | 3.090E+16 | 1.454E+12 | 2.150E+04 | -2.369E+26 |

VLOG(1R)

E2

VLOG(1T)

V80

VLOG(W1)

VLOG(N3)

VLOG(N2)

VLOG(N1)

TRANSPORTE

DIFUSIVO 1

DIFUSIVO 2

DIFUSIVO 3

DIFUSIVO 4

DIFUSIVO 5

DIFUSIVO 6

DIFUSIVO 7

DIFUSIVO 8

DIFUSIVO 9

DIFUSIVO 10

DIFUSIVO 11

DIFUSIVO 12

DIFUSIVO 13

DIFUSIVO 14

DIFUSIVO 15

DIFUSIVO 16

DIFUSIVO 17

DIFUSIVO 18

DIFUSIVO 19

DIFUSIVO 20

DIFUSIVO 21

DIFUSIVO 22

DIFUSIVO 23

DIFUSIVO 24

DIFUSIVO 25

DIFUSIVO 26

DIFUSIVO 27

DIFUSIVO 28

DIFUSIVO 29

DIFUSIVO 30

DIFUSIVO 31

DIFUSIVO 32

DIFUSIVO 33

DIFUSIVO 34

DIFUSIVO 35

DIFUSIVO 36

DIFUSIVO 37

DIFUSIVO 38

DIFUSIVO 39

DIFUSIVO 40

DIFUSIVO 41

DIFUSIVO 42

DIFUSIVO 43

DIFUSIVO 44

DIFUSIVO 45

DIFUSIVO 46

DIFUSIVO 47

DIFUSIVO 48

DIFUSIVO 49

DIFUSIVO 50

DIFUSIVO 51

DIFUSIVO 52

DIFUSIVO 53

DIFUSIVO 54

DIFUSIVO 55

DIFUSIVO 56

DIFUSIVO 57

DIFUSIVO 58

DIFUSIVO 59

DIFUSIVO 60

DIFUSIVO 61

DIFUSIVO 62

DIFUSIVO 63

DIFUSIVO 64

DIFUSIVO 65

DIFUSIVO 66

DIFUSIVO 67

DIFUSIVO 68

DIFUSIVO 69

DIFUSIVO 70

DIFUSIVO 71

DIFUSIVO 72

DIFUSIVO 73

DIFUSIVO 74

DIFUSIVO 75

DIFUSIVO 76

DIFUSIVO 77

DIFUSIVO 78

DIFUSIVO 79

DIFUSIVO 80

DIFUSIVO 81

DIFUSIVO 82

DIFUSIVO 83

DIFUSIVO 84

DIFUSIVO 85

DIFUSIVO 86

DIFUSIVO 87

DIFUSIVO 88

DIFUSIVO 89

DIFUSIVO 90

DIFUSIVO 91

DIFUSIVO 92

DIFUSIVO 93

DIFUSIVO 94

DIFUSIVO 95

DIFUSIVO 96

DIFUSIVO 97

DIFUSIVO 98

DIFUSIVO 99

DIFUSIVO 100

DIFUSIVO 101

DIFUSIVO 102

DIFUSIVO 103

DIFUSIVO 104

DIFUSIVO 105

DIFUSIVO 106

DIFUSIVO 107

DIFUSIVO 108

DIFUSIVO 109

DIFUSIVO 110

DIFUSIVO 111

DIFUSIVO 112

DIFUSIVO 113

DIFUSIVO 114

DIFUSIVO 115

DIFUSIVO 116

DIFUSIVO 117

DIFUSIVO 118

DIFUSIVO 119

DIFUSIVO 120

DIFUSIVO 121

DIFUSIVO 122

DIFUSIVO 123

DIFUSIVO 124

DIFUSIVO 125

DIFUSIVO 126

DIFUSIVO 127

DIFUSIVO 128

DIFUSIVO 129

DIFUSIVO 130

DIFUSIVO 131

DIFUSIVO 132

DIFUSIVO 133

DIFUSIVO 134

DIFUSIVO 135

DIFUSIVO 136

DIFUSIVO 137

DIFUSIVO 138

DIFUSIVO 139

DIFUSIVO 140

DIFUSIVO 141

DIFUSIVO 142

DIFUSIVO 143

DIFUSIVO 144

DIFUSIVO 145

DIFUSIVO 146

DIFUSIVO 147

DIFUSIVO 148

DIFUSIVO 149

DIFUSIVO 150

DIFUSIVO 151

DIFUSIVO 152

DIFUSIVO 153

DIFUSIVO 154

DIFUSIVO 155

DIFUSIVO 156

DIFUSIVO 157

DIFUSIVO 158

DIFUSIVO 159

DIFUSIVO 160

DIFUSIVO 161

DIFUSIVO 162

DIFUSIVO 163

DIFUSIVO 164

DIFUSIVO 165

DIFUSIVO 166

DIFUSIVO 167

DIFUSIVO 168

DIFUSIVO 169

DIFUSIVO 170

DIFUSIVO 171

DIFUSIVO 172

DIFUSIVO 173

DIFUSIVO 174

DIFUSIVO 175

DIFUSIVO 176

DIFUSIVO 177

DIFUSIVO 178

DIFUSIVO 179

DIFUSIVO 180

DIFUSIVO 181

DIFUSIVO 182

DIFUSIVO 183

DIFUSIVO 184

DIFUSIVO 185

DIFUSIVO 186

DIFUSIVO 187

DIFUSIVO 188

DIFUSIVO 189

DIFUSIVO 190

DIFUSIVO 191

DIFUSIVO 192

DIFUSIVO 193

DIFUSIVO 194

DIFUSIVO 195

DIFUSIVO 196

DIFUSIVO 197

DIFUSIVO 198

DIFUSIVO 199

DIFUSIVO 200

DIFUSIVO 201

DIFUSIVO 202

DIFUSIVO 203

DIFUSIVO 204

DIFUSIVO 205

DIFUSIVO 206

DIFUSIVO 207

DIFUSIVO 208

DIFUSIVO 209

DIFUSIVO 210

DIFUSIVO 211

DIFUSIVO 212

DIFUSIVO 213

DIFUSIVO 214

DIFUSIVO 215

DIFUSIVO 216

DIFUSIVO 217

DIFUSIVO 218

DIFUSIVO 219

DIFUSIVO 220

DIFUSIVO 221

DIFUSIVO 222

DIFUSIVO 223

DIFUSIVO 224

DIFUSIVO 225

DIFUSIVO 226

DIFUSIVO 227

DIFUSIVO 228

DIFUSIVO 229

DIFUSIVO 230

DIFUSIVO 231

DIFUSIVO 232

DIFUSIVO 233

DIFUSIVO 234

DIFUSIVO 235

DIFUSIVO 236

DIFUSIVO 237

DIFUSIVO 238

DIFUSIVO 239

DIFUSIVO 240

DIFUSIVO 241

DIFUSIVO 242

DIFUSIVO 243

DIFUSIVO 244

DIFUSIVO 245

DIFUSIVO 246

DIFUSIVO 247

DIFUSIVO 248

DIFUSIVO 249

DIFUSIVO 250

DIFUSIVO 251

DIFUSIVO 252

DIFUSIVO 253

DIFUSIVO 254

DIFUSIVO 255

DIFUSIVO 256

DIFUSIVO 257

DIFUSIVO 258

DIFUSIVO 259

DIFUSIVO 260

DIFUSIVO 261

DIFUSIVO 262

DIFUSIVO 263

DIFUSIVO 264

DIFUSIVO 265

DIFUSIVO 266

DIFUSIVO 267

DIFUSIVO 268

DIFUSIVO 269

DIFUSIVO 270

DIFUSIVO 271

DIFUSIVO 272

DIFUSIVO 273

DIFUSIVO 274

DIFUSIVO 275

DIFUSIVO 276

DIFUSIVO 277

DIFUSIVO 278

DIFUSIVO 279

DIFUSIVO 280

DIFUSIVO 281

DIFUSIVO 282

DIFUSIVO 283

DIFUSIVO 284

DIFUSIVO 285

DIFUSIVO 286

DIFUSIVO 287

DIFUSIVO 288

DIFUSIVO 289

DIFUSIVO 290

DIFUSIVO 291

DIFUSIVO 292

DIFUSIVO 293

DIFUSIVO 294

DIFUSIVO 295

DIFUSIVO 296

DIFUSIVO 297

DIFUSIVO 298

DIFUSIVO 299

DIFUSIVO 300

DIFUSIVO 301

DIFUSIVO 302

DIFUSIVO 303

DIFUSIVO 304

| | TRANSPORTE | VLOG(N1) | VLOG(N2) | VLOG(N3) | VLOG(W) | VLOG(N) | VBO | VLOG(T) | SZ | VLOG(TRA) |
|-------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| A 4 E | DIFUSIVO 1 | -3.332E+18 | -3.543E+16 | 6.088E+17 | 6.369E+16 | -2.774E+18 | 2.764E+22 | -4.235E+18 | 1.102E+12 | 1.403E+18 |
| | DIFUSIVO 2 | -5.074E+16 | -1.635E+17 | 2.239E+18 | 9.677E+14 | 1.963E+18 | 1.186E+23 | 7.166E+17 | -3.745E+10 | 2.132E+16 |
| | DIFUSIVO 3 | 4.653E+17 | 1.520E+18 | 2.736E+21 | -1.211E+16 | 2.738E+21 | 1.669E+26 | 1.376E+21 | 3.524E+11 | -2.068E+17 |
| | DIFUSIVO 4 | 2.369E+04 | 3.710E+04 | -3.990E+05 | -1.639E+22 | -3.417E+05 | -2.102E+10 | -1.109E+05 | 3.212E-03 | -3.611E+23 |
| | DIFUSIVO T | -2.918E+18 | 1.321E+18 | 2.739E+21 | 5.255E+16 | 2.737E+21 | 1.671E+26 | 1.372E+21 | 1.417E+12 | 1.158E+18 |
| | MASA | 6.903E-07 | 2.268E-06 | 4.579E-03 | -1.858E-08 | 4.582E-03 | 2.794E+02 | 2.302E-03 | 5.274E-13 | -4.093E-07 |
| | IMPULSO PZ | 5.526E-01 | 2.265E+00 | 4.629E+03 | -6.092E+00 | 4.631E+03 | 2.778E+08 | 2.105E+03 | 5.724E-07 | -1.342E+02 |
| | E.CINETICA | -5.578E+06 | 2.204E+06 | 4.689E+09 | 1.011E+05 | 4.685E+09 | 2.802E+14 | 1.936E+09 | 2.601E+00 | 2.228E+06 |
| | Q.ELECTRIC | 3.282E+18 | -1.281E+17 | 1.630E+18 | -6.272E+16 | 4.737E+18 | 9.095E+22 | 4.954E+18 | -1.140E+12 | -1.382E+18 |
| | E.INTERNA | -1.011E+07 | -3.302E+07 | -5.544E+10 | 2.631E+05 | -5.949E+10 | -3.627E+15 | -2.990E+10 | -7.658E+00 | 5.757E+06 |
| B 4 E | E.RADIANTE | 1.614E+04 | 2.296E+04 | -2.738E+05 | -7.472E+21 | -2.346E+05 | -1.443E+10 | -7.617E+04 | 2.246E-03 | -1.846E+23 |
| | DIFUSIVO 1 | -1.550E+19 | -4.478E+17 | 1.164E+18 | 7.216E+17 | -1.479E+19 | 5.358E+21 | -2.721E+19 | 4.153E+12 | 1.325E+19 |
| | DIFUSIVO 2 | -6.294E+17 | -9.071E+17 | 1.489E+18 | 2.929E+16 | -4.847E+16 | 1.276E+22 | -7.753E+17 | -7.733E+10 | 5.378E+17 |
| | DIFUSIVO 3 | 6.257E+18 | 9.093E+18 | 3.076E+21 | -3.047E+17 | 3.091E+21 | 1.722E+26 | 1.563E+21 | 7.620E+11 | -5.595E+18 |
| | DIFUSIVO 4 | 3.829E+06 | 3.601E+06 | -5.970E+06 | -4.788E+22 | 1.463E+06 | -5.187E+10 | 4.208E+06 | -6.352E-02 | -8.791E+23 |
| | DIFUSIVO T | -9.776E+18 | 7.738E+18 | 3.078E+21 | 4.462E+17 | 3.076E+21 | 1.722E+26 | 1.535E+21 | 4.878E+12 | 8.192E+18 |
| | MASA | 9.566E-06 | 1.369E-05 | 5.147E-03 | -4.600E-07 | 5.170E-03 | 2.880E+02 | 2.613E-03 | 1.145E-12 | -8.446E-06 |
| | IMPULSO PZ | 9.805E+00 | 1.506E+01 | 5.704E+03 | -1.823E+01 | 5.729E+03 | 3.142E+08 | 2.630E+03 | 1.464E-06 | -3.347E+02 |
| | E.CINETICA | -2.673E+07 | 1.590E+07 | 6.336E+09 | 1.226E+06 | 6.225E+09 | 3.475E+14 | 2.587E+09 | 1.187E+01 | 2.250E+07 |
| | Q.ELECTRIC | 1.497E+19 | -4.593E+17 | 3.252E+17 | -6.923E+17 | 1.474E+19 | 7.405E+21 | 2.643E+19 | -4.271E+12 | -1.271E+15 |
| C 4 E | E.INTERNA | -1.381E+08 | -1.976E+08 | -6.683E+10 | 6.621E+06 | -6.717E+10 | -3.742E+15 | -3.397E+10 | -1.056E+01 | 1.216E+08 |
| | E.RADIANTE | 2.640E+06 | 2.483E+06 | -4.117E+06 | -2.183E+22 | 1.009E+06 | -3.573E+10 | 2.924E+06 | -4.357E-02 | -4.009E+23 |
| | DIFUSIVO 1 | -4.401E+19 | -3.690E+18 | -5.028E+18 | 1.034E+19 | -5.272E+19 | -5.603E+23 | -9.168E+19 | 8.423E+12 | 1.423E+20 |
| | DIFUSIVO 2 | -4.043E+13 | -5.101E+18 | -5.945E+18 | 9.497E+17 | -1.509E+19 | -6.361E+23 | -1.367E+19 | -2.210E+11 | 1.300E+19 |
| | DIFUSIVO 3 | -2.717E+21 | -3.459E+21 | -7.082E+21 | 6.382E+20 | -1.326E+22 | -5.843E+26 | -1.069E+22 | -1.551E+14 | 8.751E+21 |
| | DIFUSIVO 4 | 1.621E+09 | 1.711E+09 | 1.576E+09 | -3.221E+23 | 5.308E+05 | 2.128E+14 | 4.907E+09 | 1.881E+01 | -4.436E+24 |
| | DIFUSIVO T | -2.765E+21 | -3.468E+21 | -7.093E+21 | 6.495E+20 | -1.333E+22 | -5.855E+26 | -1.079E+22 | -1.465E+14 | 8.946E+21 |
| | MASA | -4.550E-03 | -5.794E-03 | -1.185E-02 | 1.069E-03 | -2.220E-02 | -9.784E+02 | -1.750E-02 | -2.557E-10 | 1.472E-02 |
| | IMPULSO PZ | -6.104E+03 | -7.749E+03 | -1.589E+04 | 1.315E+03 | -2.976E+04 | -1.316E+09 | -2.423E+04 | -3.477E-04 | 1.811E+04 |
| | E.CINETICA | -4.369E+09 | -1.048E+10 | -2.142E+10 | 1.966E+09 | -4.027E+10 | -1.776E+15 | -3.328E+10 | -4.402E+02 | 2.708E+10 |
| D 4 E | Q.ELECTRIC | 1.997E+19 | -1.411E+18 | -9.174E+17 | -9.387E+18 | 3.763E+19 | -7.579E+22 | 7.781E+19 | -8.644E+12 | -1.292E+20 |
| | E.INTERNA | 5.903E+10 | 7.516E+10 | 1.539E+11 | -1.387E+10 | 2.881E+11 | 1.270E+16 | 2.323E+11 | 3.370E+03 | -1.910E+11 |
| | E.RADIANTE | 1.133E+09 | 1.196E+09 | 1.391E+09 | -1.469E+23 | 3.710E+09 | 1.487E+14 | 3.439E+09 | 1.256E+01 | -2.023E+24 |
| | DIFUSIVO 1 | -7.423E+19 | -5.674E+18 | -6.249E+16 | 2.050E+20 | -7.994E+19 | -4.403E+23 | -1.486E+20 | 1.145E+13 | 2.259E+21 |
| | DIFUSIVO 2 | -7.409E+18 | -9.170E+18 | -9.482E+16 | 2.048E+19 | -1.667E+19 | -5.473E+23 | -1.621E+19 | -2.944E+11 | 2.257E+20 |
| | DIFUSIVO 3 | -2.020E+21 | -2.492E+21 | -4.252E+19 | 5.588E+21 | -4.550E+21 | -1.482E+26 | -4.545E+21 | -7.868E+13 | 6.159E+22 |
| | DIFUSIVO 4 | 2.326E+11 | 2.431E+11 | 2.600E+09 | -4.737E+24 | 4.793E+11 | 1.457E+16 | 4.524E+11 | 1.757E+03 | -5.219E+25 |
| | DIFUSIVO T | -2.102E+21 | -2.507E+21 | -4.308E+19 | 5.913E+21 | -4.652E+21 | -1.492E+26 | -4.709E+21 | -6.772E+12 | 6.408E+22 |
| | MASA | -3.391E-03 | -4.184E-03 | -7.155E-05 | 9.380E-03 | -7.647E-02 | -2.488E+02 | -7.628E-03 | -1.324E-10 | 1.034E-01 |
| | IMPULSO PZ | -5.495E+03 | -6.774E+03 | -1.159E+02 | 1.344E+04 | -1.239E+04 | -4.055E+08 | -1.249E+04 | -2.138E-04 | 1.482E+05 |
| E 4 E | E.CINETICA | -9.308E+09 | -1.112E+10 | -1.893E+08 | 2.574E+10 | -2.061E+10 | -6.678E+14 | -2.153E+10 | -3.023E+02 | 2.937E+11 |
| | Q.ELECTRIC | 6.682E+19 | -3.497E+18 | -3.233E+16 | -1.846E+20 | 6.327E+19 | -1.070E+23 | 1.324E+20 | -1.175E+13 | -2.033E+21 |
| | E.INTERNA | 4.390E+10 | 5.416E+10 | 9.227E+08 | -1.214E+11 | 9.899E+10 | 3.220E+15 | 9.875E+10 | 1.714E+03 | -1.338E+12 |
| | E.RADIANTE | 1.651E+11 | 1.726E+11 | 1.847E+09 | -2.160E+24 | 3.356E+11 | 1.034E+16 | 3.225E+11 | 1.253E+03 | -2.380E+25 |

| | VLOG(N1) | VLOG(N2) | VLOG(N3) | VLOG(W) | VLOG(N) | VBO | VLOG(T) | EZ | VLOG(TA) |
|--------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| A | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| TRANSPORTE | | | | | | | | | |
| DIFUSIVO 1 | -1.010E+19 | -3.481E+17 | -6.017E+17 | 5.131E+16 | -1.105E+19 | -8.821E+22 | -2.058E+19 | 3.260E+12 | 7.066E+19 |
| DIFUSIVO 2 | -4.702E+17 | -5.892E+17 | -7.721E+17 | 2.389E+17 | -1.832E+18 | -1.005E+23 | -1.638E+18 | -3.976E+13 | 3.290E+18 |
| DIFUSIVO 3 | -1.560E+20 | -1.931E+20 | -1.936E+21 | 7.333E+19 | -2.260E+21 | -1.402E+26 | -1.407E+21 | -1.241E+13 | 1.093E+21 |
| DIFUSIVO 4 | 2.340E+18 | 1.672E+08 | 2.264E+08 | 6.470E+19 | 6.273E+08 | 2.919E+13 | 6.240E+08 | -2.232E+01 | -5.997E+24 |
| DIFUSIVO T | -1.666E+20 | 1.941E+20 | -1.948E+21 | 6.470E+19 | -6.273E+08 | -1.404E+26 | -1.429E+21 | -9.190E+12 | 1.167E+21 |
| MASA | -2.617E+04 | -3.240E+04 | -3.208E+03 | 1.317E+04 | -3.192E+03 | -2.340E+02 | -2.356E+03 | -2.082E+11 | 1.834E+03 |
| IMPULSO IPZ1 | -2.819E+02 | -3.484E+02 | -3.443E+01 | 1.070E+01 | -4.073E+03 | -2.353E+08 | -2.077E+03 | -2.224E+05 | -2.485E+02 |
| E.CINETICA | -3.212E+08 | -3.715E+08 | -3.641E+09 | 1.033E+08 | -4.354E+09 | -4.722E+14 | -3.039E+09 | -1.681E+01 | 2.250E+09 |
| Q.ELECTRIC | 9.631E+18 | -2.411E+17 | -1.701E+17 | 4.072E+18 | 9.617E+18 | -1.220E+22 | 1.094E+19 | -3.299E+12 | -6.737E+19 |
| E.INTERNA | 3.390E+09 | 4.197E+09 | 4.164E+10 | -1.724E+09 | -4.923E+10 | 3.404E+15 | 3.054E+10 | 2.696E+02 | -2.773E+10 |
| E.RADIANTE | 1.474E+08 | 1.143E+08 | 1.544E+08 | -1.986E+23 | 4.161E+08 | 1.992E+13 | 4.015E+08 | -1.107E+01 | -2.735E+24 |
| B | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| DIFUSIVO 1 | -1.541E+19 | -5.520E+17 | -6.268E+17 | 7.477E+16 | -1.055E+19 | -1.000E+23 | -3.128E+19 | 4.155E+12 | 1.030E+20 |
| DIFUSIVO 2 | -7.350E+17 | -9.220E+17 | -6.362E+17 | 3.550E+17 | -2.295E+18 | -1.074E+23 | -1.143E+16 | -3.202E+10 | 4.098E+18 |
| DIFUSIVO 3 | -2.480E+20 | -3.081E+20 | -1.427E+21 | 1.203E+20 | -1.944E+21 | -1.050E+26 | -1.300E+21 | -1.053E+13 | 1.657E+21 |
| DIFUSIVO 4 | 4.996E+08 | 3.044E+08 | 2.557E+08 | 4.972E+23 | 1.090E+09 | 4.300E+13 | 1.091E+09 | -2.937E+01 | -6.842E+24 |
| DIFUSIVO T | -2.050E+20 | -3.090E+20 | -1.428E+21 | 1.281E+20 | -2.002E+21 | -1.070E+26 | -1.534E+21 | -1.242E+13 | 1.765E+21 |
| MASA | -4.173E+04 | -5.169E+04 | -2.538E+03 | 2.070E+04 | -3.321E+03 | -1.772E+02 | -1.178E+03 | -4.772E+11 | 2.780E+03 |
| IMPULSO IPZ1 | -4.675E+02 | -5.678E+02 | -2.947E+03 | 4.171E+01 | -3.093E+03 | -1.980E+08 | -4.353E+03 | -3.082E+05 | 5.759E+02 |
| E.CINETICA | -5.650E+08 | -6.571E+08 | -2.950E+09 | 2.732E+08 | -4.135E+09 | -2.222E+14 | -3.080E+09 | -2.415E+01 | 3.764E+09 |
| Q.ELECTRIC | 1.474E+19 | -3.700E+17 | -1.130E+17 | 7.121E+16 | 1.253E+19 | -7.330E+21 | 4.714E+19 | -4.207E+12 | -9.005E+19 |
| E.INTERNA | 5.402E+09 | 6.695E+09 | 3.100E+10 | -2.014E+09 | -4.310E+10 | 2.300E+15 | 2.625E+10 | 3.591E+02 | -3.603E+10 |
| E.RADIANTE | 3.111E+09 | 2.530E+08 | 1.757E+08 | -2.267E+23 | 7.370E+08 | 2.557E+15 | 1.285E+08 | -1.677E+01 | -3.725E+24 |
| C | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| DIFUSIVO 1 | -3.001E+19 | -1.487E+16 | -7.484E+17 | 1.387E+19 | -3.305E+19 | -1.945E+23 | -6.271E+19 | 0.084E+12 | 1.910E+20 |
| DIFUSIVO 2 | -1.044E+16 | -2.388E+16 | -1.283E+16 | 6.534E+17 | -5.555E+18 | -2.240E+23 | -5.377E+18 | -1.050E+11 | 1.775E+19 |
| DIFUSIVO 3 | -7.970E+20 | -1.027E+21 | -1.544E+21 | 6.010E+20 | -3.367E+21 | -1.461E+26 | -2.800E+21 | -4.787E+13 | 4.981E+21 |
| DIFUSIVO 4 | 1.590E+09 | 1.570E+09 | 9.574E+08 | 6.214E+23 | 4.024E+09 | 1.490E+14 | 3.071E+09 | -3.470E+03 | -6.558E+24 |
| DIFUSIVO T | -8.305E+20 | -1.031E+21 | -1.540E+21 | 3.703E+20 | -3.407E+21 | -1.465E+26 | -2.660E+21 | -4.787E+13 | 5.183E+21 |
| MASA | -1.337E+03 | -1.722E+03 | -2.384E+03 | 6.006E+04 | -5.043E+03 | -2.440E+02 | -4.092E+03 | -9.023E+11 | 6.350E+03 |
| IMPULSO IPZ1 | -1.872E+03 | -2.530E+03 | -3.785E+03 | 5.909E+02 | -7.027E+03 | -3.333E+08 | -6.564E+03 | 1.081E+04 | 6.141E+03 |
| E.CINETICA | -2.553E+09 | -3.154E+09 | -4.701E+09 | 1.157E+09 | -1.061E+10 | -4.521E+14 | -7.437E+09 | -1.255E+02 | 1.591E+10 |
| Q.ELECTRIC | 2.873E+19 | -9.010E+17 | -3.545E+17 | 1.302E+19 | 2.749E+19 | -3.015E+22 | 5.074E+19 | -0.190E+12 | -1.792E+20 |
| E.INTERNA | 1.733E+10 | 2.251E+10 | 3.555E+10 | -7.857E+09 | 7.320E+10 | 3.175E+15 | 9.085E+10 | 1.040E+03 | -1.083E+11 |
| E.RADIANTE | 1.116E+09 | 1.097E+09 | 5.989E+08 | -2.834E+23 | 2.012E+09 | 1.647E+14 | 2.710E+09 | -4.104E+00 | -3.702E+24 |
| D | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| DIFUSIVO 1 | -5.304E+19 | -4.251E+18 | -1.773E+18 | 2.310E+19 | -5.900E+19 | -4.904E+23 | -1.083E+19 | 0.154E+12 | 3.162E+20 |
| DIFUSIVO 2 | -5.255E+16 | -6.573E+16 | -2.501E+16 | 2.285E+16 | -1.633E+16 | -5.067E+23 | -1.415E+16 | -2.227E+11 | 3.747E+19 |
| DIFUSIVO 3 | -2.253E+21 | -3.259E+21 | -2.004E+21 | 1.300E+21 | -7.075E+21 | -2.830E+26 | -7.402E+21 | -1.200E+14 | 1.250E+22 |
| DIFUSIVO 4 | 5.993E+09 | 6.491E+09 | 6.500E+09 | 7.460E+23 | 1.499E+10 | 5.011E+14 | 1.360E+10 | 0.314E+01 | -1.020E+25 |
| DIFUSIVO T | -2.657E+21 | -3.250E+21 | -2.004E+21 | 1.300E+21 | -7.075E+21 | -2.830E+26 | -7.402E+21 | -1.200E+14 | 1.250E+22 |
| MASA | -4.345E+03 | -5.420E+03 | -3.422E+03 | 1.893E+03 | -2.120E+02 | -4.735E+02 | -1.240E+02 | -1.007E+10 | 2.600E+02 |
| IMPULSO IPZ1 | -6.635E+03 | -6.635E+03 | -2.610E+03 | 4.017E+03 | -2.013E+04 | -7.280E+08 | -1.924E+04 | -2.757E+04 | 3.800E+04 |
| E.CINETICA | -1.035E+10 | -1.260E+10 | -7.744E+09 | 4.510E+09 | -3.996E+10 | -1.715E+15 | -3.047E+10 | 3.667E+02 | 0.212E+10 |
| Q.ELECTRIC | 4.780E+19 | -2.523E+18 | -6.365E+17 | -2.084E+19 | 4.740E+19 | 9.162E+15 | 9.410E+19 | -8.370E+12 | -2.067E+20 |
| E.INTERNA | 5.634E+10 | 7.030E+10 | 4.409E+10 | -2.453E+10 | 1.111E+11 | 9.162E+15 | 1.005E+11 | 6.346E+03 | -1.381E+11 |
| E.RADIANTE | 4.297E+09 | 4.010E+09 | 1.616E+09 | -3.400E+23 | 1.609E+10 | 3.560E+14 | 1.031E+10 | 5.244E+01 | -4.090E+24 |

| S | | | | | | | | | |
|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| S | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |

TABLA VI

Coeficientes de transporte

| | 2E | 3E | 4E | 1S | 2S |
|----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Ω'_{AT} | | | | | |
| A | -5.53E+09 | 1.22E+09 | -1.07E+07 | 8.39E+11 | -3.91E+10 |
| B | -3.42E+10 | 1.49E+09 | -1.29E+08 | 4.62E+11 | -6.66E+10 |
| C | -6.98E+10 | -8.12E+09 | 1.95E+09 | 7.45E+11 | -1.10E+11 |
| D | -4.64E+11 | -1.34E+11 | 5.68E+08 | 1.22E+12 | -1.35E+11 |
| E | -7.44E+12 | -1.61E+11 | -1.09E+11 | -6.54E+12 | -1.04E+11 |
| F | -5.21E+12 | -4.00E+11 | -3.85E+10 | -2.89E+11 | -3.32E+10 |
| G | -8.89E+12 | -8.72E+11 | -8.08E+10 | -8.57E+12 | 7.08E+10 |
| H | -1.65E+13 | -1.63E+12 | -1.52E+11 | 4.79E+14 | 2.07E+11 |
| Ω'_{dT} | | | | | |
| A | 3.89E+18 | 6.19E+18 | 1.79E+18 | 1.09E+19 | 1.31E+19 |
| B | 2.01E+19 | 2.24E+19 | 1.86E+19 | 1.64E+19 | 1.97E+19 |
| C | 3.28E+19 | 3.69E+19 | 4.54E+19 | 3.16E+19 | 3.75E+19 |
| D | 5.49E+19 | 6.12E+19 | 6.91E+19 | 5.24E+19 | 6.20E+19 |
| E | 9.17E+19 | 1.20E+20 | 1.14E+20 | 8.48E+19 | 1.03E+20 |
| F | 1.41E+20 | 1.56E+20 | 1.74E+20 | 1.33E+20 | 1.57E+20 |
| G | 2.03E+20 | 2.23E+20 | 2.48E+20 | 1.90E+20 | 2.23E+20 |
| H | 2.77E+20 | 3.05E+20 | 3.38E+20 | 2.25E+20 | 3.07E+20 |
| Ω'_{NT} | | | | | |
| A | -1.83E+21 | 1.50E+21 | -1.37E+21 | 1.53E+21 | -3.53E+21 |
| B | -2.83E+21 | 1.59E+21 | -1.60E+21 | 1.17E+21 | -4.67E+21 |
| C | -6.18E+19 | -3.50E+20 | 4.39E+21 | 1.04E+21 | -5.11E+21 |
| D | -5.72E+19 | -1.11E+20 | -4.72E+20 | 9.85E+20 | -4.51E+21 |
| E | -9.58E+19 | -1.04E+20 | -1.99E+20 | -3.47E+21 | -2.50E+21 |
| F | -1.43E+20 | -1.57E+20 | -1.77E+20 | -2.34E+20 | -7.20E+20 |
| G | -2.04E+20 | -2.25E+20 | -2.51E+20 | -2.23E+21 | 5.70E+20 |
| H | -2.79E+20 | -3.07E+20 | -3.41E+20 | 8.22E+22 | 1.74E+21 |

| | 2E | 3E | 4E | 1S | 2E | |
|----------------|----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Ω'_{NW} | A | -6.30E+19 | -1.54E+19 | -7.68E+18 | 1.44E+21 | -1.95E+21 |
| | B | -1.36E+21 | -1.99E+20 | -1.18E+20 | 1.14E+21 | -3.31E+21 |
| | C | 7.14E+21 | 1.46E+21 | 4.35E+21 | 1.39E+21 | -3.07E+21 |
| | D | 2.15E+22 | 7.19E+21 | 5.83E+21 | 2.27E+21 | -2.60E+21 |
| | E | 2.49E+23 | 3.05E+22 | 6.74E+21 | -4.22E+22 | -1.15E+21 |
| | F | 1.64E+24 | 1.83E+23 | 2.27E+22 | -2.13E+21 | 6.93E+19 |
| | G | 6.85E+24 | 7.43E+23 | 8.44E+22 | -7.80E+20 | 7.95E+20 |
| | H | 2.20E+25 | 2.28E+24 | 2.49E+23 | -1.72E+22 | 1.59E+21 |
| Ω'_{TW} | A | -1.10E+08 | -2.82E+07 | -1.38E+07 | 2.76E+09 | -3.43E+09 |
| | B | -2.85E+09 | -2.49E+08 | -2.51E+08 | 2.35E+09 | -5.22E+09 |
| | C | 2.46E+10 | 5.04E+09 | 1.31E+10 | 4.22E+09 | -8.73E+09 |
| | D | 8.78E+10 | 2.92E+10 | 2.58E+10 | 8.84E+09 | -9.28E+09 |
| | E | 1.32E+12 | 1.59E+11 | 3.31E+10 | -2.11E+11 | -5.21E+09 |
| | F | 1.05E+13 | 1.16E+12 | 1.42E+11 | -1.33E+10 | 1.69E+08 |
| | G | 5.12E+13 | 5.54E+12 | 6.24E+11 | -6.94E+09 | 4.95E+09 |
| | H | 1.88E+14 | 1.94E+13 | 2.11E+12 | -1.14E+11 | 1.13E+10 |
| Ω'_{AR} | A | 1.52E+09 | 4.23E+09 | 4.32E+08 | 8.40E+12 | -4.47E+11 |
| | B | -4.44E+11 | -4.13E+09 | -5.99E+07 | 8.79E+12 | -9.79E+11 |
| | C | 2.18E+14 | 5.31E+11 | 3.88E+10 | 1.80E+13 | -1.36E+12 |
| | D | 1.58E+16 | 1.58E+14 | 1.69E+12 | 4.58E+13 | -1.60E+12 |
| | E | 3.42E+17 | 3.80E+15 | 4.42E+13 | -1.24E+15 | -9.50E+11 |
| | F | 3.79E+18 | 3.34E+16 | 3.77E+14 | -8.68E+13 | 2.04E+11 |
| | G | 1.60E+19 | 1.73E+17 | 1.92E+15 | -4.53E+13 | 1.69E+12 |
| | H | 6.57E+19 | 6.62E+17 | 7.10E+15 | -1.26E+15 | 3.65E+12 |

TABLA VII a

Coeficientes Ω_{Ni}^*

| | 2E | 3E | 4E | 1S | 2S |
|---------------|----|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Ω_{Ni} | A | -6.24E+19 | -1.58E+19 | -7.73E+18 | -1.94E+21 |
| | B | -1.31E+31 | -2.00E+20 | -1.19E+20 | -3.29E+21 |
| | C | 1.23E+19 | 1.65E+20 | 3.70E+21 | -3.02E+21 |
| | D | -2.41E+14 | 2.03E+17 | 1.95E+19 | -2.99E+21 |
| | E | -1.33E+14 | -1.42E+15 | -1.49E+16 | -9.87E+20 |
| | F | -1.26E+13 | -1.77E+14 | -2.13E+15 | 2.60E+20 |
| | G | -3.48E+12 | -3.85E+13 | -4.40E+14 | 1.00E+21 |
| | H | -1.10E+12 | -1.22E+13 | -1.37E+14 | 1.80E+21 |
| Ω_{Ti} | A | -1.10E+08 | -2.89E+07 | -1.39E+07 | -3.42E+09 |
| | B | -2.76E+09 | -4.17E+08 | -2.52E+08 | -5.18E+09 |
| | C | 4.14E+07 | 5.64E+08 | 1.11E+10 | -8.57E+09 |
| | D | -3.37E+03 | 7.36E+05 | 8.47E+07 | -8.89E+09 |
| | E | -7.04E+02 | -7.55E+03 | -8.71E+04 | -4.48E+09 |
| | F | -7.98E+01 | -1.11E+03 | -1.32E+04 | 1.19E+09 |
| | G | -2.56E+01 | -2.83E+02 | -3.21E+03 | 6.23E+09 |
| | H | -9.29E+00 | -1.02E+02 | -1.14E+03 | 1.29E+10 |
| Ω_{di} | A | 7.16E+18 | 5.78E+18 | 3.14E+18 | 6.16E+18 |
| | B | 1.02E+19 | 1.37E+19 | 1.38E+19 | 8.74E+18 |
| | C | 1.48E+17 | 1.64E+18 | 1.05E+19 | 1.49E+19 |
| | D | 2.73E+15 | 3.07E+16 | 3.53E+17 | 2.24E+19 |
| | E | 1.12E+14 | 1.25E+15 | 1.40E+16 | 3.35E+19 |
| | F | 1.06E+13 | 1.47E+14 | 1.65E+15 | 4.58E+19 |
| | G | 2.91E+12 | 3.21E+13 | 3.59E+14 | 5.92E+19 |
| | H | 9.23E+11 | 1.02E+13 | 1.13E+14 | 8.18E+19 |

TABLA VII b

Coeficientes Ω_{A*}

| | 2E | 3E | 4E | 1S | 2S |
|---------------|----|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Ω_{Ai} | A | 6.42E+07 | 1.32E+08 | 3.90E+11 | -2.15E+10 |
| | B | -1.58E+10 | -1.49E+08 | 3.93E+11 | -4.70E+10 |
| | C | 3.01E+10 | 4.35E+09 | 7.01E+11 | -6.49E+10 |
| | D | 8.05E+08 | 6.38E+08 | 1.32E+12 | -7.48E+10 |
| | E | 1.39E+07 | 9.74E+06 | -1.58E+13 | -4.09E+10 |
| | F | 5.98E+05 | -2.09E+06 | 1.27E+11 | 1.77E+10 |
| | G | -1.09E+06 | -1.37E+06 | 4.71E+11 | 9.39E+10 |
| | H | -6.72E+05 | -7.92E+05 | 1.67E+13 | 1.91E+11 |
| Ω_{AN} | A | 1.10E+10 | 1.19E+09 | 6.85E+07 | 6.26E+10 |
| | B | 5.81E+10 | 1.71E+09 | 2.66E+08 | 9.95E+10 |
| | C | -2.09E+12 | -4.60E+10 | -5.75E+09 | 2.09E+11 |
| | D | -1.17E+13 | -1.17E+12 | -1.24E+11 | 3.44E+11 |
| | E | -3.48E+13 | -3.85E+12 | -4.46E+11 | 5.01E+11 |
| | F | -1.05E+14 | -9.31E+12 | -1.05E+12 | 6.67E+11 |
| | G | -1.75E+14 | -1.94E+13 | -2.18E+12 | 9.69E+11 |
| | H | -3.35E+14 | -3.70E+13 | -4.13E+12 | 1.13E+12 |
| Ω_{AT} | A | 5.44E+09 | 2.33E+09 | 5.11E+07 | 3.42E+10 |
| | B | 3.18E+10 | 3.28E+09 | 1.38E+08 | 5.64E+10 |
| | C | -2.17E+12 | -5.64E+10 | -4.63E+09 | 1.31E+11 |
| | D | -1.22E+13 | -1.30E+12 | -1.24E+11 | 2.46E+11 |
| | E | -4.22E+13 | -4.01E+12 | -5.55E+11 | 4.18E+11 |
| | F | -1.11E+14 | -9.71E+12 | -1.09E+12 | 6.25E+11 |
| | G | -1.84E+14 | -2.03E+13 | -2.26E+12 | 9.93E+11 |
| | H | -3.51E+14 | -3.86E+13 | -4.28E+12 | 1.24E+12 |

b) Conjunto intermedio de fuerzas y flujos

| | Z_W $\nabla \ln W$ | Z_i $\nabla \ln \left(\frac{m_e}{m_a} \right)$ | Z_p $\nabla \ln p$ | Z_u $\nabla \beta_0$ | Z_T $\nabla \ln T$ | Z_E E^* | Z_R $\nabla \ln T_R$ |
|-----------------|-------------------------|--|-------------------------|---------------------------|-------------------------|----------------|---------------------------|
| \bar{v}_{Amb} | Ω_{AW} | Ω_{Ai} | Ω_{Ap} | Ω_{Au} | Ω_{AT}^p | Ω_{AE} | Ω_{AR} |
| \bar{J}_{el} | Ω_{eW} | Ω_{ei} | Ω_{ep} | Ω_{eu} | Ω_{eT}^p | Ω_{eE} | Ω_{eR} |
| \bar{J}_N | Ω_{NW} | Ω_{Ni} | Ω_{Np} | Ω_{Nu} | Ω_{NT}^p | Ω_{NE} | Ω_{NR} |
| \bar{J}_{pzi} | Ω_{pW} | Ω_{pi} | Ω_{pp} | Ω_{pu} | Ω_{pT}^p | Ω_{pE} | Ω_{pR} |
| \bar{J}_T | Ω_{TW} | Ω_{Ti} | Ω_{Tp} | Ω_{Tu} | Ω_{TT}^p | Ω_{TE} | Ω_{TR} |

c) Conjunto completo

| | Z_p | Z_u | Z_T | Z_W | Z_R |
|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| \bar{v}_{Amb} | Ω'_{Ap} | Ω'_{Au} | Ω'_{AT} | Ω'_{AW} | Ω'_{AR} |
| \bar{J}_{el} | Ω'_{ep} | Ω'_{eu} | Ω'_{eT} | Ω'_{eW} | Ω'_{eR} |
| \bar{J}_N | Ω'_{Np} | Ω'_{Nu} | Ω'_{NT} | Ω'_{NW} | Ω'_{NR} |
| \bar{J}_{pzi} | Ω'_{pp} | Ω'_{pu} | Ω'_{pT} | Ω'_{pW} | Ω'_{pR} |
| \bar{J}_T | Ω'_{Tp} | Ω'_{Tu} | Ω'_{TT} | Ω'_{TW} | Ω'_{TR} |

TABLA IX

Valores máximos de las fuerzas

| | | 2E | 3E | 4E | 1E | 2E |
|---------|---|----------|----------|----------|----------|----------|
| Z_R^e | A | 1.04E-03 | 1.25E-02 | 2.25E-01 | 1.79E-03 | 4.28E-02 |
| | B | 2.96E-03 | 3.71E-02 | 4.22E-01 | 1.18E-03 | 3.15E-02 |
| | C | 1.60E-04 | 1.29E-02 | 6.80E-01 | 5.88E-04 | 1.91E-02 |
| | D | 6.96E-06 | 6.13E-04 | 5.12E-02 | 3.27E-04 | 1.28E-02 |
| | E | 5.11E-07 | 4.57E-05 | 4.00E-03 | 4.03E-04 | 8.36E-03 |
| | F | 8.37E-08 | 7.56E-06 | 6.72E-04 | 1.33E-04 | 5.79E-03 |
| | G | 2.12E-08 | 2.10E-06 | 1.79E-04 | 8.46E-05 | 4.18E-03 |
| | H | 6.75E-09 | 6.77E-07 | 6.33E-05 | 6.41E-05 | 3.13E-03 |
| Z_E^e | A | 1.40E+04 | 6.14E+04 | 2.88E+05 | 3.93E+04 | 1.84E+05 |
| | B | 1.12E+05 | 3.91E+05 | 1.35E+06 | 2.96E+04 | 1.46E+05 |
| | C | 1.95E+05 | 1.68E+06 | 1.17E+07 | 1.87E+04 | 1.00E+05 |
| | D | 1.31E+05 | 1.17E+06 | 1.03E+07 | 1.31E+04 | 7.38E+04 |
| | E | 8.71E+04 | 7.82E+05 | 6.90E+06 | 6.38E+03 | 5.40E+04 |
| | F | 6.24E+04 | 5.62E+05 | 5.02E+06 | 6.27E+03 | 4.15E+04 |
| | G | 4.71E+04 | 4.49E+05 | 3.80E+06 | 4.82E+03 | 3.30E+04 |
| | H | 3.69E+04 | 3.35E+05 | 2.98E+06 | 3.73E+03 | 2.70E+04 |
| Z_T^e | A | 1.37E-02 | 2.68E-02 | 3.59E-01 | 1.25E-02 | 6.94E-02 |
| | B | 3.46E-02 | 1.45E-01 | 4.56E-01 | 8.04E-03 | 4.67E-02 |
| | C | 4.00E-02 | 3.11E-01 | 1.95E+00 | 3.68E-03 | 2.49E-02 |
| | D | 2.21E-02 | 1.92E-01 | 1.52E+00 | 1.88E-03 | 1.51E-02 |
| | E | 1.17E-02 | 1.05E-01 | 8.98E-01 | 3.19E-04 | 8.80E-03 |
| | F | 7.07E-03 | 6.33E-02 | 5.57E-01 | 9.68E-04 | 5.57E-03 |
| | G | 4.58E-03 | 4.33E-02 | 3.65E-01 | 5.59E-04 | 3.75E-03 |
| | H | 3.14E-03 | 2.85E-02 | 2.51E-01 | 6.43E-04 | 2.66E-03 |

| | | <u>2E</u> | <u>3E</u> | <u>4E</u> | <u>1S</u> | <u>2S</u> |
|-----------------------|---|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Z_N^e | A | 4. 20E-03 | 1. 72E-02 | 1. 19E-01 | 1. 12E-02 | 6. 86E-02 |
| | B | 3. 32E-02 | 1. 11E-01 | 3. 78E-01 | 7. 24E-03 | 4. 62E-02 |
| | C | 3. 67E-02 | 2. 96E-01 | 1. 79E+00 | 3. 33E-03 | 2. 44E-02 |
| | D | 2. 02E-02 | 1. 77E-01 | 1. 42E+00 | 1. 71E-03 | 1. 44E-02 |
| | E | 1. 08E-02 | 9. 65E-02 | 8. 46E-01 | 4. 07E-04 | 8. 12E-03 |
| | F | 6. 45E-03 | 5. 77E-02 | 5. 09E-01 | 8. 42E-04 | 5. 03E-03 |
| | G | 4. 17E-03 | 3. 96E-02 | 3. 35E-01 | 4. 95E-04 | 3. 35E-03 |
| | H | 2. 85E-03 | 2. 58E-02 | 2. 31E-01 | 4. 21E-04 | 2. 36E-03 |
| Z_{Na}^e | A | 2. 20E-03 | 4. 17E-01 | 4. 21E-01 | 1. 80E-01 | 3. 47E-01 |
| | B | 2. 39E-01 | 1. 06E+00 | 4. 34E+00 | 2. 01E-01 | 2. 20E-01 |
| | C | 8. 58E+01 | 2. 66E+01 | 1. 68E+01 | 9. 80E-02 | 1. 16E-01 |
| | D | 2. 18E+05 | 1. 00E+04 | 1. 47E+03 | 4. 77E-02 | 8. 55E-02 |
| | E | 1. 50E+07 | 7. 11E+06 | 1. 50E+06 | 2. 31E-03 | 8. 33E-02 |
| | F | 1. 28E+10 | 3. 81E+08 | 1. 26E+08 | 4. 58E-02 | 9. 60E-02 |
| | G | 2. 00E+11 | 3. 57E+09 | 3. 33E+09 | 9. 04E-02 | 1. 15E-01 |
| | H | 2. 16E+12 | 1. 37E+10 | 3. 52E+10 | 4. 52E-02 | 1. 38E-01 |
| $Z_{Ne}^e + Z_{Np}^e$ | A | 4. 65E-03 | 1. 67E-02 | 9. 36E-02 | 1. 20E-02 | 5. 73E-02 |
| | B | 2. 91E-02 | 1. 05E-01 | 3. 48E-01 | 7. 51E-03 | 3. 82E-02 |
| | C | 3. 68E-02 | 2. 99E-01 | 2. 02E+00 | 3. 45E-03 | 2. 02E-02 |
| | D | 2. 02E-02 | 1. 77E-01 | 1. 42E+00 | 1. 78E-03 | 1. 23E-02 |
| | E | 1. 07E-02 | 9. 65E-02 | 8. 47E-01 | 4. 94E-04 | 7. 40E-03 |
| | F | 6. 43E-03 | 5. 82E-02 | 5. 13E-01 | 8. 27E-04 | 4. 78E-03 |
| | G | 4. 17E-03 | 3. 96E-02 | 3. 37E-01 | 4. 92E-04 | 3. 26E-03 |
| | H | 2. 85E-03 | 2. 57E-02 | 2. 31E-01 | 4. 17E-04 | 2. 32E-03 |

| | Z_R^a | | | | Z_F^a | | | | Z_T^a | | | |
|---|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | 2S | | | | 3E | | | | 4E | | | |
| | 1S | | | | 2S | | | | 3E | | | |
| | 2S | | | | 3E | | | | 4E | | | |
| A | 2.99E-04 | 1.52E-06 | 2.26E+01 | 4.29E-01 | 1.19E-03 | 3.50E+04 | 2.37E+06 | 1.70E+07 | 3.96E-03 | 1.33E-06 | 1.21E-05 | 1.21E-05 |
| B | 1.19E-04 | 7.49E-07 | 9.77E-01 | 1.39E-02 | 3.82E-05 | 5.60E+03 | 4.97E+05 | 6.70E+06 | 3.10E-03 | 1.08E-06 | 8.12E-06 | 8.12E-06 |
| C | 3.15E-05 | 1.66E-07 | 1.54E-04 | 1.60E-06 | 3.16E-09 | 1.29E+01 | 7.10E+02 | 8.74E+03 | 1.30E-04 | 3.91E-07 | 4.10E-06 | 4.10E-06 |
| D | 1.28E-05 | 3.75E-08 | 4.74E-07 | 4.46E-09 | 3.97E-11 | 2.98E+00 | 3.40E+01 | 3.70E+02 | 6.68E-06 | 8.17E-08 | 2.46E-06 | 2.46E-06 |
| E | 6.87E-06 | 8.70E-10 | 1.62E-08 | 1.85E-10 | 2.04E-12 | 1.40E+00 | 1.29E+01 | 1.15E+02 | 1.50E-06 | 1.96E-09 | 1.62E-06 | 1.62E-06 |
| F | 4.74E-06 | 1.01E-08 | 2.03E-09 | 2.29E-11 | 2.54E-13 | 7.62E-01 | 6.96E+00 | 6.31E+01 | 7.66E-07 | 2.32E-08 | 1.19E-06 | 1.19E-06 |
| G | 3.62E-06 | 2.27E-08 | 4.28E-10 | 4.77E-12 | 5.13E-14 | 4.53E-01 | 4.14E+00 | 3.76E+01 | 3.97E-07 | 8.84E-08 | 9.06E-07 | 9.06E-07 |
| H | 2.89E-06 | 5.26E-10 | 1.95E-10 | 1.33E-12 | 1.34E-14 | 2.88E-01 | 2.60E+00 | 2.41E+01 | 2.25E-07 | 7.34E-10 | 6.91E-07 | 6.91E-07 |
| A | 5.10E+03 | 1.34E+02 | 1.70E+07 | 2.37E+06 | 3.50E+04 | 3.50E+04 | 2.37E+06 | 1.70E+07 | 3.96E-03 | 1.33E-06 | 1.21E-05 | 1.21E-05 |
| B | 2.19E+03 | 7.51E+01 | 6.70E+06 | 4.97E+05 | 5.60E+03 | 5.60E+03 | 4.97E+05 | 6.70E+06 | 3.10E-03 | 1.08E-06 | 8.12E-06 | 8.12E-06 |
| C | 5.59E+02 | 1.73E+01 | 8.74E+03 | 7.10E+02 | 1.29E+01 | 1.29E+01 | 7.10E+02 | 8.74E+03 | 1.30E-04 | 3.91E-07 | 4.10E-06 | 4.10E-06 |
| D | 2.90E+02 | 5.41E+00 | 3.70E+02 | 3.40E+01 | 2.98E+00 | 2.98E+00 | 3.40E+01 | 3.70E+02 | 6.68E-06 | 8.17E-08 | 2.46E-06 | 2.46E-06 |
| E | 1.77E+02 | 1.54E-01 | 1.15E+02 | 1.29E+01 | 1.40E+00 | 1.40E+00 | 1.29E+01 | 1.15E+02 | 1.50E-06 | 1.96E-09 | 1.62E-06 | 1.62E-06 |
| F | 1.36E+02 | 2.10E+00 | 6.31E+01 | 6.96E+00 | 7.62E-01 | 7.62E-01 | 6.96E+00 | 6.31E+01 | 7.66E-07 | 2.32E-08 | 1.19E-06 | 1.19E-06 |
| G | 1.13E+02 | 5.33E+00 | 3.76E+01 | 4.14E+00 | 4.53E-01 | 4.53E-01 | 4.14E+00 | 3.76E+01 | 3.97E-07 | 8.84E-08 | 9.06E-07 | 9.06E-07 |
| H | 9.67E+01 | 1.38E-01 | 2.41E+01 | 2.60E+00 | 2.88E-01 | 2.88E-01 | 2.60E+00 | 2.41E+01 | 2.25E-07 | 7.34E-10 | 6.91E-07 | 6.91E-07 |
| A | 1.21E-05 | 1.33E-06 | 3.96E-03 | 1.90E-04 | 2.95E-05 | 2.95E-05 | 1.90E-04 | 3.96E-03 | 1.21E-05 | 1.33E-06 | 1.21E-05 | 1.21E-05 |
| B | 8.12E-06 | 1.08E-06 | 3.10E-03 | 1.37E-04 | 1.39E-05 | 1.39E-05 | 1.37E-04 | 3.10E-03 | 8.12E-06 | 1.08E-06 | 8.12E-06 | 8.12E-06 |
| C | 4.10E-06 | 3.91E-07 | 1.30E-04 | 1.32E-05 | 3.44E-07 | 3.44E-07 | 1.32E-05 | 1.30E-04 | 4.10E-06 | 3.91E-07 | 4.10E-06 | 4.10E-06 |
| D | 2.46E-06 | 8.17E-08 | 6.68E-06 | 6.16E-07 | 5.64E-08 | 5.64E-08 | 6.16E-07 | 6.68E-06 | 2.46E-06 | 8.17E-08 | 2.46E-06 | 2.46E-06 |
| E | 1.62E-06 | 1.96E-09 | 1.50E-06 | 1.50E-06 | 1.98E-08 | 1.98E-08 | 1.50E-06 | 1.50E-06 | 1.62E-06 | 1.96E-09 | 1.62E-06 | 1.62E-06 |
| F | 1.19E-06 | 2.32E-08 | 7.66E-07 | 8.65E-08 | 9.70E-09 | 9.70E-09 | 7.66E-07 | 7.66E-07 | 1.19E-06 | 2.32E-08 | 1.19E-06 | 1.19E-06 |
| G | 9.06E-07 | 8.84E-08 | 3.97E-07 | 4.47E-08 | 4.97E-09 | 4.97E-09 | 3.97E-07 | 3.97E-07 | 9.06E-07 | 8.84E-08 | 9.06E-07 | 9.06E-07 |
| H | 6.91E-07 | 7.34E-10 | 2.25E-07 | 2.52E-08 | 2.80E-09 | 2.80E-09 | 2.25E-07 | 2.25E-07 | 6.91E-07 | 7.34E-10 | 6.91E-07 | 6.91E-07 |

| | | 2E | 3E | 4E | 1S | 2S |
|-----------------------|---|----------|----------|----------|----------|----------|
| Z_N^a | A | 1.66E-02 | 3.85E-04 | 2.27E-03 | 7.31E-07 | 7.01E-06 |
| | B | 8.23E-06 | 2.72E-04 | 1.77E-03 | 6.22E-07 | 4.84E-06 |
| | C | 3.28E-07 | 1.53E-05 | 1.02E-04 | 2.45E-07 | 2.68E-06 |
| | D | 5.37E-08 | 6.05E-07 | 6.42E-06 | 7.40E-08 | 1.82E-06 |
| | E | 2.12E-08 | 1.82E-07 | 1.60E-06 | 1.97E-09 | 1.40E-06 |
| | F | 9.14E-09 | 8.26E-08 | 7.31E-07 | 2.40E-08 | 1.16E-06 |
| | G | 4.70E-09 | 4.24E-08 | 3.78E-07 | 5.48E-08 | 9.71E-07 |
| | H | 2.64E-09 | 2.39E-08 | 2.14E-07 | 1.27E-09 | 8.04E-07 |
| Z_{Na}^a | A | 1.67E-05 | 3.88E-04 | 2.27E-03 | 8.63E-07 | 7.29E-06 |
| | B | 8.64E-06 | 2.77E-04 | 1.78E-03 | 8.63E-07 | 5.22E-06 |
| | C | 1.68E-05 | 1.10E-04 | 1.91E-04 | 5.34E-07 | 3.26E-06 |
| | D | 4.28E-04 | 5.49E-04 | 6.72E-04 | 2.84E-07 | 2.72E-06 |
| | E | 1.14E-02 | 1.14E-02 | 1.16E-02 | 1.54E-08 | 2.94E-06 |
| | F | 1.05E-01 | 1.04E-01 | 1.05E-01 | 3.63E+07 | 3.64E-06 |
| | G | 5.16E-01 | 5.15E-01 | 5.16E-01 | 1.60E-06 | 4.61E-06 |
| | H | 1.72E+00 | 1.72E+00 | 1.72E+00 | 5.62E-08 | 5.75E-06 |
| $Z_{Ne}^a + Z_{Np}^a$ | A | 2.19E-03 | 2.28E-01 | 3.01E+00 | 4.76E-06 | 1.85E-04 |
| | B | 1.73E-04 | 1.73E-02 | 3.54E-01 | 2.23E-06 | 6.63E-05 |
| | C | 3.35E-07 | 1.77E-05 | 2.19E-04 | 4.54E-07 | 1.48E-05 |
| | D | 5.37E-08 | 6.05E-07 | 6.46E-06 | 1.00E-07 | 5.49E-06 |
| | E | 2.01E-08 | 1.82E-07 | 1.60E-06 | 2.25E-09 | 2.66E-06 |
| | F | 9.15E-09 | 8.23E-08 | 7.30E-07 | 2.57E-08 | 1.71E-06 |
| | G | 4.70E-09 | 4.24E-08 | 3.78E-07 | 5.68E-08 | 1.23E-06 |
| | H | 2.64E-09 | 2.39E-08 | 2.13E-07 | 1.30E-09 | 9.35E-07 |

TABLA X
Valores críticos de las fuerzas

| | 2E | 3E | 4E | 1S | 2S |
|---------|------------|----------|----------|----------|----------|
| Z_R^e | A 1.81E-04 | 2.62E-03 | 6.41E-02 | 2.64E-04 | 6.42E-03 |
| | B 4.44E-04 | 5.78E-03 | 7.41E-02 | 1.73E-04 | 4.70E-03 |
| | C 2.36E-05 | 1.97E-03 | 1.06E-01 | 8.61E-05 | 2.83E-03 |
| | D 1.02E-06 | 9.18E-05 | 8.02E-03 | 4.85E-05 | 1.86E-03 |
| | E 7.43E-08 | 6.74E-06 | 6.02E-04 | 7.97E-05 | 1.20E-03 |
| | F 1.21E-08 | 1.11E-06 | 1.00E-04 | 1.79E-05 | 8.25E-04 |
| | G 3.06E-09 | 2.90E-07 | 2.65E-05 | 1.16E-05 | 5.92E-04 |
| | H 9.74E-10 | 9.88E-08 | 9.37E-06 | 9.13E-06 | 4.41E-04 |
| Z_E^e | 2.58E+03 | 1.09E+04 | 8.10E+04 | 5.60E+03 | 2.67E+04 |
| | 1.63E+04 | 5.90E+04 | 2.29E+05 | 4.20E+03 | 2.11E+04 |
| | 2.78E+04 | 2.43E+05 | 1.73E+06 | 2.63E+03 | 1.44E+04 |
| | 1.86E+04 | 1.68E+05 | 1.51E+06 | 1.82E+03 | 1.06E+04 |
| | 1.23E+04 | 1.12E+05 | 1.00E+06 | 1.06E+03 | 7.69E+03 |
| | 8.80E+03 | 8.00E+04 | 7.22E+05 | 8.84E+02 | 5.89E+03 |
| | 6.60E+03 | 6.03E+04 | 5.46E+05 | 6.75E+02 | 4.67E+03 |
| | 5.15E+03 | 4.72E+04 | 4.30E+05 | 5.16E+02 | 3.80E+03 |
| Z_T^e | 1.65E-04 | 6.67E-04 | 4.67E-03 | 3.09E-04 | 1.53E-03 |
| | 7.75E-04 | 2.87E-03 | 1.15E-02 | 1.93E-04 | 1.01E-03 |
| | 9.62E-04 | 8.39E-03 | 5.85E-02 | 9.03E-05 | 5.14E-04 |
| | 5.15E-04 | 4.67E-03 | 4.16E-02 | 4.93E-05 | 3.20E-04 |
| | 2.72E-04 | 2.49E-03 | 2.23E-02 | 3.77E-05 | 1.75E-04 |
| | 1.62E-04 | 1.48E-03 | 1.34E-02 | 1.67E-05 | 1.11E-04 |
| | 1.04E-04 | 1.01E-03 | 8.68E-03 | 1.07E-05 | 7.52E-05 |
| | 7.15E-05 | 6.55E-04 | 5.97E-03 | 8.03E-06 | 5.34E-05 |

| | | 2E | 3E | 4E | 1S | 2S |
|-----------------------|---|----------|----------|----------|----------|----------|
| Z_N^e | A | 1.87E-03 | 3.72E-03 | 3.01E-02 | 1.73E-03 | 1.05E-02 |
| | B | 5.05E-03 | 1.70E-02 | 6.82E-02 | 1.10E-03 | 6.92E-03 |
| | C | 5.62E-03 | 4.82E-02 | 2.96E-01 | 5.14E-04 | 3.52E-03 |
| | D | 3.04E-03 | 2.74E-02 | 2.35E-01 | 2.73E-04 | 2.02E-03 |
| | E | 1.61E-03 | 1.47E-02 | 1.31E-01 | 2.46E-04 | 1.13E-03 |
| | F | 9.63E-04 | 8.71E-03 | 7.91E-02 | 1.06E-04 | 7.01E-04 |
| | G | 6.20E-04 | 5.66E-03 | 5.13E-02 | 6.60E-05 | 4.68E-04 |
| | H | 4.23E-04 | 3.87E-03 | 3.52E-02 | 6.23E-05 | 3.30E-04 |
| Z_{Na}^e | A | 1.60E-03 | 9.91E-02 | 2.57E-01 | 3.60E-02 | 5.53E-02 |
| | B | 4.10E-02 | 3.52E-01 | 8.24E-01 | 3.83E-02 | 3.83E-02 |
| | C | 2.47E+01 | 1.22E+01 | 3.52E+00 | 2.38E-02 | 2.31E-02 |
| | D | 4.57E+04 | 4.49E+03 | 5.24E+02 | 1.34E-02 | 1.93E-02 |
| | E | 1.18E+07 | 3.01E+06 | 3.31E+05 | 7.63E-04 | 2.14E-02 |
| | F | 3.83E+09 | 1.82E+08 | 3.30E+07 | 1.82E-02 | 2.75E-02 |
| | G | 8.05E+10 | 2.00E+09 | 9.34E+08 | 5.27E-02 | 3.65E-02 |
| | H | 1.21E+10 | 2.18E+09 | 1.15E+09 | 6.62E-03 | 4.81E-02 |
| $Z_{Ne}^e + Z_{Np}^e$ | A | 8.62E-04 | 3.59E-03 | 2.71E-02 | 1.82E-03 | 8.84E-03 |
| | B | 4.50E-03 | 1.63E-02 | 6.32E-02 | 1.14E-03 | 5.86E-03 |
| | C | 5.64E-03 | 4.85E-02 | 3.23E-01 | 5.25E-04 | 3.05E-03 |
| | D | 3.05E-03 | 2.74E-02 | 2.45E-01 | 2.79E-04 | 1.83E-03 |
| | E | 1.61E-03 | 1.46E-02 | 1.31E-01 | 3.64E-04 | 1.07E-03 |
| | F | 9.62E-04 | 8.85E-03 | 7.91E-02 | 1.06E-04 | 6.83E-04 |
| | G | 6.20E-04 | 5.68E-03 | 5.16E-02 | 6.59E-05 | 4.62E-04 |
| | H | 4.28E-04 | 3.87E-03 | 3.53E-02 | 6.17E-05 | 3.28E-04 |

| | 2E | 3E | 4E | 1S | 2S |
|-----------------------|--|--|--|--|--|
| Z_N^a | A 7.09E-06 B 3.23E-06 C 3.74E-08 D 1.63E-08 E 7.02E-09 F 3.37E-09 G 1.72E-09 H 9.68E-10 | 1.76E-04 1.21E-04 1.55E-06 1.13E-07 6.56E-08 3.07E-08 1.57E-08 8.87E-09 | 9.84E-04 7.62E-04 2.89E-05 5.67E-07 4.64E-07 2.72E-07 1.42E-07 8.07E-08 | 2.19E-07 1.02E-07 5.07E-08 1.39E-08 3.02E-10 2.52E-09 1.65E-09 1.31E-10 | 2.65E-06 1.81E-06 9.78E-07 6.51E-07 4.84E-07 3.88E-07 3.09E-07 2.43E-07 |
| Z_{Na}^a | A 7.17E-06 B 3.39E-06 C 2.04E-06 D 1.74E-04 E 5.30E-03 F 4.48E-02 G 2.21E-01 H 7.40E-01 | 1.76E-04 1.23E-04 1.14E-05 9.81E-05 4.76E-03 4.47E-02 2.20E-01 7.36E-01 | 9.86E-04 7.66E-04 5.42E-05 6.09E-05 4.36E-03 4.41E-02 2.20E-01 7.38E-01 | 2.60E-07 1.41E-07 1.11E-07 5.37E-08 2.36E-09 3.73E-08 4.32E-08 5.78E-09 | 2.75E-06 1.95E-06 1.19E-06 9.72E-07 1.01E-06 1.20E-06 1.43E-06 1.66E-06 |
| $Z_{Ne}^a + Z_{Np}^a$ | A 9.20E-04 B 6.87E-05 C 3.81E-08 D 1.83E-08 E 7.02E-09 F 3.37E-09 G 1.72E-09 H 9.68E-10 | 1.15E-01 7.57E-03 1.79E-06 1.14E-07 6.56E-08 3.07E-08 7.05E-11 8.87E-09 | 1.35E+00 1.56E-01 6.20E-05 1.04E-06 4.64E-07 2.72E-07 1.48E-07 8.06E-08 | 1.39E-06 3.72E-07 9.33E-08 1.87E-08 3.46E-10 2.71E-09 1.72E-09 1.34E-10 | 7.02E-05 2.49E-05 5.44E-06 1.97E-06 9.28E-07 5.73E-07 3.95E-07 2.85E-07 |

TABLA XI

Coeficientes habituales

| | 2E | 3E | 4E | 1S | 2S |
|----------|------------|------------|------------|------------|-----------|
| σ | | | | | |
| A | 2. 58E+12 | 2. 13E+12 | 1. 14E+12 | 3. 30E+12 | 3. 53E+12 |
| B | 4. 42E+12 | 4. 56E+12 | 4. 27E+12 | 4. 21E+12 | 4. 50E+12 |
| C | 6. 91E+12 | 7. 76E+12 | 8. 64E+12 | 6. 19E+12 | 6. 61E+12 |
| D | 9. 26E+12 | 1. 03E+13 | 1. 17E+13 | 8. 38E+12 | 8. 91E+12 |
| E | 1. 24E+13 | 1. 38E+13 | 1. 56E+13 | 9. 65E+12 | 1. 20E+13 |
| F | 1. 59E+13 | 1. 75E+13 | 1. 97E+13 | 1. 42E+13 | 1. 54E+13 |
| G | 1. 95E+13 | 2. 15E+13 | 2. 40E+13 | 1. 76E+13 | 1. 89E+13 |
| H | 2. 33E+13 | 2. 57E+13 | 2. 86E+13 | 2. 15E+13 | 2. 27E+13 |
| μ' | | | | | |
| A | 1. 50E+06 | 2. 90E+06 | 1. 56E+06 | 3. 30E+06 | 3. 72E+06 |
| B | 4. 54E+06 | 4. 92E+06 | 4. 35E+06 | 3. 91E+06 | 4. 38E+06 |
| C | 4. 74E+06 | 4. 74E+06 | 5. 75E+06 | 5. 10E+06 | 5. 67E+06 |
| D | 5. 92E+06 | 5. 94E+06 | 5. 92E+06 | 6. 25E+06 | 6. 96E+06 |
| E | 7. 39E+06 | 7. 41E+06 | 7. 28E+06 | 8. 78E+06 | 8. 61E+06 |
| F | 8. 89E+06 | 8. 91E+06 | 8. 86E+06 | 9. 35E+06 | 1. 02E+07 |
| G | 1. 04E+07 | 1. 04E+07 | 1. 03E+07 | 1. 07E+07 | 1. 18E+07 |
| H | 1. 42E+07 | 1. 19E+07 | 1. 18E+07 | 1. 04E+07 | 1. 35E+07 |
| μ'_R | | | | | |
| A | 7. 70E+07 | 8. 43E+07 | 8. 96E+07 | -5. 32E+06 | 3. 20E+07 |
| B | 2. 73E+07 | 7. 20E+07 | 8. 52E+07 | -7. 93E+06 | 3. 58E+07 |
| C | -1. 13E+09 | -1. 11E+08 | 3. 09E+07 | -1. 33E+07 | 4. 16E+07 |
| D | -1. 77E+10 | -1. 77E+09 | -1. 74E+08 | -1. 95E+07 | 4. 64E+07 |
| E | -1. 61E+11 | -1. 61E+10 | -1. 60E+09 | -7. 46E+07 | 5. 14E+07 |
| F | -6. 99E+11 | -7. 00E+10 | -6. 96E+09 | -4. 01E+07 | 5. 44E+07 |
| G | -2. 08E+12 | -2. 01E+11 | -2. 00E+10 | -4. 88E+07 | 5. 69E+07 |
| H | -6. 12E+12 | -4. 62E+11 | -4. 43E+10 | -5. 05E+07 | 6. 59E+07 |

| | | 2E | 3E | 4E | 1 S | 2S |
|----------------------------|---|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\frac{D_A^{Tl}}{m_e m_a}$ | A | -5.50E+09 | 1.26E+09 | -7.10E+06 | 8.27E+11 | -3.88E+10 |
| | B | -3.38E+10 | 1.50E+09 | -1.27E+08 | 4.37E+11 | -6.56E+10 |
| | C | -3.20E+11 | -1.28E+10 | 1.56E+09 | 5.76E+11 | -1.04E+11 |
| | D | -1.72E+12 | -2.58E+11 | -1.22E+10 | 4.20E+11 | -1.20E+11 |
| | E | -1.11E+13 | -5.66E+11 | -1.54E+11 | 3.87E+13 | -7.00E+10 |
| | F | -1.65E+13 | -1.38E+12 | -1.47E+11 | 3.81E+12 | 2.48E+10 |
| | G | -2.78E+13 | -2.94E+12 | -3.06E+11 | -6.07E+12 | 1.69E+11 |
| | H | -6.07E+13 | -5.66E+12 | -5.91E+11 | 5.43E+14 | 3.33E+11 |
| $\frac{D_A^{Rl}}{m_e m_a}$ | A | 2.92E+09 | 5.35E+09 | 6.39E+08 | 8.42E+12 | -4.44E+11 |
| | B | -4.42E+11 | -4.01E+09 | -2.65E+07 | 8.84E+12 | -9.71E+11 |
| | C | 2.78E+14 | 6.41E+11 | 4.09E+10 | 1.84E+13 | -1.32E+12 |
| | D | 1.96E+16 | 1.95E+14 | 2.06E+12 | 4.83E+13 | -1.50E+12 |
| | E | 4.23E+17 | 4.68E+15 | 5.41E+13 | -1.62E+15 | -7.47E+11 |
| | F | 4.68E+18 | 4.11E+16 | 4.62E+14 | -1.04E+14 | 5.14E+11 |
| | G | 1.98E+19 | 2.13E+17 | 2.36E+15 | -5.67E+13 | 2.16E+12 |
| | H | 8.47E+19 | 8.19E+17 | 8.75E+15 | -1.57E+15 | 4.27E+12 |
| ω | A | 1.25E-02 | 7.45E-03 | 9.26E-03 | -8.50E-03 | 1.97E-02 |
| | B | 1.65E-02 | 8.59E-03 | 1.05E-02 | -6.62E-03 | 2.42E-02 |
| | C | -2.57E-03 | -5.93E-03 | -4.39E-02 | -1.11E-02 | 3.28E-02 |
| | D | -1.36E-04 | -1.29E-03 | -1.35E-02 | -2.43E-02 | 3.69E-02 |
| | E | -3.21E-05 | -1.05E-04 | -9.42E-04 | 6.15E-01 | 3.57E-02 |
| | F | -3.87E-05 | -5.38E-05 | -1.83E-04 | 3.81E-02 | 3.32E-02 |
| | G | -5.42E-05 | -6.28E-05 | -1.03E-04 | 1.80E-02 | 3.19E-02 |
| | H | -7.38E-05 | -8.24E-05 | -1.04E-04 | 2.93E-01 | 3.20E-02 |

| | λ_T | | | | λ'_W | | | | λ'_R | | | |
|---|-------------|-----------|-----------|-----------|--------------|-----------|-----------|-----------|--------------|-----------|----|-----------|
| | 2E | 3E | 4E | 1S | 2S | 2E | 3E | 4E | 1S | 2S | 2E | 3E |
| A | 4.13E+08 | 2.47E+08 | 3.95E+08 | 2.60E+07 | 5.18E+08 | -6.99E+05 | 1.57E+05 | 1.30E+05 | -2.77E+08 | 6.35E+07 | A | -2.82E+07 |
| B | 6.15E+08 | 3.23E+08 | 5.44E+08 | 2.97E+08 | -1.54E+08 | 3.39E+07 | -1.68E+08 | 1.31E+06 | 1.13E+07 | -1.63E+09 | B | 1.28E+09 |
| C | 3.63E+08 | 7.31E+08 | -2.48E+08 | 4.34E+08 | 1.20E+09 | -5.61E+09 | -1.18E+09 | -1.05E+09 | -3.97E+08 | 2.42E+08 | C | -7.97E+10 |
| D | 2.14E+08 | 5.65E+08 | 4.07E+08 | 9.97E+08 | 1.68E+09 | -1.07E+09 | -3.69E+09 | -6.78E+09 | -1.08E+09 | 2.78E+08 | D | -1.04E+10 |
| E | 4.86E+08 | 5.11E+08 | 8.23E+08 | -1.13E+10 | 2.20E+09 | -7.80E+08 | -9.28E+08 | -1.30E+09 | 3.90E+10 | 1.87E+08 | E | -1.03E+11 |
| F | 8.77E+08 | 9.53E+08 | 1.03E+09 | 2.45E+09 | 2.89E+09 | -5.51E+10 | 2.48E+08 | -1.18E+09 | 2.84E+09 | 8.69E+07 | F | -1.01E+11 |
| G | 1.57E+09 | 1.60E+09 | 1.75E+09 | 5.47E+09 | 3.86E+09 | -2.17E+11 | -2.29E+10 | -2.10E+09 | 2.42E+09 | -2.58E+08 | G | -1.62E+12 |
| H | 2.21E+09 | 2.50E+09 | 2.74E+09 | 5.38E+10 | 5.64E+09 | -6.02E+12 | -5.89E+10 | -5.77E+09 | -5.70E+09 | -5.59E+08 | H | -2.85E+13 |
| A | -6.99E+05 | 1.57E+05 | 1.30E+05 | -2.77E+08 | 6.35E+07 | -6.99E+05 | 1.57E+05 | 1.30E+05 | -2.77E+08 | 6.35E+07 | A | -2.82E+07 |
| B | 3.39E+07 | -1.68E+08 | 1.31E+06 | 1.13E+07 | -1.63E+09 | 3.39E+07 | -1.68E+08 | 1.31E+06 | 1.13E+07 | -1.63E+09 | B | 1.28E+09 |
| C | -5.61E+09 | -1.18E+09 | -1.05E+09 | -3.97E+08 | 2.42E+08 | -5.61E+09 | -1.18E+09 | -1.05E+09 | -3.97E+08 | 2.42E+08 | C | -7.97E+10 |
| D | -1.07E+09 | -3.69E+09 | -6.78E+09 | -1.08E+09 | 2.78E+08 | -1.07E+09 | -3.69E+09 | -6.78E+09 | -1.08E+09 | 2.78E+08 | D | -1.04E+10 |
| E | -7.80E+08 | -9.28E+08 | -1.30E+09 | 3.90E+10 | 1.87E+08 | -7.80E+08 | -9.28E+08 | -1.30E+09 | 3.90E+10 | 1.87E+08 | E | -1.03E+11 |
| F | -5.51E+10 | 2.48E+08 | -1.18E+09 | 2.84E+09 | 8.69E+07 | -5.51E+10 | 2.48E+08 | -1.18E+09 | 2.84E+09 | 8.69E+07 | F | -1.01E+11 |
| G | -2.17E+11 | -2.29E+10 | -2.10E+09 | 2.42E+09 | -2.58E+08 | -2.17E+11 | -2.29E+10 | -2.10E+09 | 2.42E+09 | -2.58E+08 | G | -1.62E+12 |
| H | -6.02E+12 | -5.89E+10 | -5.77E+09 | -5.70E+09 | -5.59E+08 | -6.02E+12 | -5.89E+10 | -5.77E+09 | -5.70E+09 | -5.59E+08 | H | -2.85E+13 |
| A | -2.82E+07 | 2.00E+06 | 3.93E+06 | -5.50E+09 | 1.52E+09 | -2.82E+07 | 2.00E+06 | 3.93E+06 | -5.50E+09 | 1.52E+09 | A | -2.82E+07 |
| B | 1.28E+09 | -1.38E+08 | 2.20E+06 | 1.01E+08 | -3.39E+10 | 1.28E+09 | -1.38E+08 | 2.20E+06 | 1.01E+08 | -3.39E+10 | B | 1.28E+09 |
| C | -7.97E+10 | -1.68E+10 | -1.94E+10 | -7.49E+09 | 4.69E+09 | -7.97E+10 | -1.68E+10 | -1.94E+10 | -7.49E+09 | 4.69E+09 | C | -7.97E+10 |
| D | -1.04E+10 | -4.07E+10 | -7.48E+10 | -1.79E+10 | 5.75E+09 | -1.04E+10 | -4.07E+10 | -7.48E+10 | -1.79E+10 | 5.75E+09 | D | -1.04E+10 |
| E | -1.03E+11 | -4.94E+09 | -1.14E+10 | 5.64E+11 | 3.70E+09 | -1.03E+11 | -4.94E+09 | -1.14E+10 | 5.64E+11 | 3.70E+09 | E | -1.03E+11 |
| F | -1.01E+11 | -6.20E+10 | -4.78E+09 | 3.88E+10 | 1.39E+09 | -1.01E+11 | -6.20E+10 | -4.78E+09 | 3.88E+10 | 1.39E+09 | F | -1.01E+11 |
| G | -1.62E+12 | -1.28E+11 | -1.60E+10 | 3.86E+10 | -5.02E+09 | -1.62E+12 | -1.28E+11 | -1.60E+10 | 3.86E+10 | -5.02E+09 | G | -1.62E+12 |
| H | -2.85E+13 | -5.80E+11 | -4.92E+10 | -7.04E+10 | -1.37E+10 | -2.85E+13 | -5.80E+11 | -4.92E+10 | -7.04E+10 | -1.37E+10 | H | -2.85E+13 |

TABLA XII
Valores de las particiones

| Para partículas | | | | | | | | |
|---------------------|------|------|------|------|------|------|------|----------|
| intervalo | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| valor central | 0.3 | 0.8 | 1.2 | 1.6 | 2.0 | 2.4 | 2.8 | 3.2 |
| límite superior | 0.6 | 1.0 | 1.4 | 1.8 | 2.2 | 2.6 | 3.0 | ∞ |
| peso de integración | 0.11 | 0.53 | 1.13 | 2.06 | 2.92 | 4.56 | 6.72 | 10.4 |

| Para fotones | | | | | | | | |
|-----------------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| intervalo | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| valor central | 0.7 | 1.05 | 1.2 | 1.4 | 1.8 | 2.2 | 2.6 | 3.0 |
| límite superior | 0.99 | 1.1 | 1.3 | 1.6 | 2.0 | 2.4 | 2.8 | 3.2 |

TABLA XIII
Comparación de resultados con trabajo de Spitzer

| χ | $D_T/ V_{LT} $ | $\frac{\delta f_T - \delta f_N}{\mu F}$ |
|--------|----------------|---|
| 0.3 | 0.21 | 0.17 |
| 0.8 | 1.40 | 1.48 |
| 1.2 | 0.65 | 0.69 |
| 1.6 | -5.66 | -4.78 |
| 2.0 | -26.8 | -21.7 |
| 2.4 | -76.7 | -66.6 |
| 2.8 | -194. | -198. |
| 3.2 | -424. | -954. |

valores interpolados en tabla de Spitzer
fórmula dada por SH para protones fijos

BIBLIOGRAFIA

- (1) Abramowitz , M.y Stegun , I.A.(1972) : Handbook of Mathematical Functions , National Bureau of Standards , Washington D.C.
- (2) Allen , R.(1962) : Astrophysical Quantities , Atholone Press , Londres.
- (3) Anderson , J.L.(1976) : Gen.Rel.Grav. , 7 , pág.53.
- (4) Athay , G.(1972) : Radiation Transport in Spectral Lines , D Reidel Publishing Co., Dordrecht , Holanda .
- (5) Balescu , R.(1960) : Phys.Fluids , 3 , pág.52.
- (6) Balescu , R.(1975) : Equilibrium and Monequilibrium Statistical Mechanics , John Wiley & Sons , New York.
- (7) Bates , D.R.(1962) : Atomic and Molecular Processes , Academic Press , New York.
- (8) Braginskii , S.I.(1965) : Reviews of Plasma Physics , Ed.: M.A.Leontovich Consultants Bureau , New York.
- (9) Campbell , P.M.(1984) : Phys.Rev.A , 30 , pág.365.
- (10) Cohen , R.S., Spitzer , L.y Routly , M.R.(1950) : Phys.Rev., 80 , pág.230.
- (11) Chandraseklar , S.(1943) : Astrophys J., 97 , pág.255.
- (12) Chapman , S.(1917) : Phil.Trans.Royal.Soc.A , 217 , pág.115 y otros.
- (13) Chapman , S.y Cowling , T.G.(1º edición 1936, tercera edición 1970) : The Mathematical Theory of Non - Uniform Gases , Cambridge Univ. Press , Cambridge.

- (14) Daskhan, M., Falcon , C.A.y Gosh , A.S.(1982) : no publicado.
- (15) Dalgarno, A.(1958) : Phil.Trans.A , 250 , 426.
- (16) Dalgarno , A.,Lynn , N.(1956) : Proc.Phys.Soc., 69 , pág.821.
- (17) Debye , P.y Hückel , E.(1923) : Phys.Z., 24 , pág.285.
- (18) Devoto , R.S.(1966) : Phys.Fluids , 9 , pág.1230.
- (19) Devoto , R.S.(1968) : J.Plasma Physics , 2 , pág.617.
- (20) De Witt , C.y Detouf J.F.(1960) : La Théorie des Gaz Neutres et Ionisés , John Wiley & Sons , New York.
- (21) Doménico , B.A.(1972) : On the Application of the Generalized Newton-Raphson Method to the Singly-Ionized Calcium Line Formation Problem in Model Stellar Atmospheres , NCAR Cooperative Thesis No 25 , University of Colorado y High Altitude Observatory (NCAR) , Boulder.
- (22) Duderstadt , J.J., y Martin , W.R.(1979) : Transport Theory , John Wiley & Sons , New York.
- (23) Dreicer , H.(1959) : Phys.Rev., 115 , pág.238.
- (24) Ehlers , J.y Kohler , E.(1977) : J.Math Phys , 18 , pág.2014.
- (25) Fontenla , J.M.(1979) : Solar Physics , 64 , pág.177.
- (26) Fontenla , J.M.(1983) : Trabajo presentado en la III Reunión Regional Latinoamericana de Astronomía de la IAU , Bs.As.
- (27) Fontenla , J.M.y Rovira M.(1982) : Solar Physics , 85 , pág.141.
- (28) Fontenla , J.M.(1985) : Rev.Mexicana de Astr.y Astrof., 10 , pág 413.
- (29) Fontenla , J.M., Rovira , M.(1985) : Solar Phys., 96 , pág.53.
- (30) Fox , J.W.y Gal , E.(1967) : Proc.Phys.Soc., 90 , pág.55.

- (31) Grad , (1958) : Handbuch der Physik , Vol.12 , Springer.
- (32) Gray , D.R.y Kilkenny , J.D.(1980) : Plasma Phys., 22 , pág.81.
- (33) Heasley , J.N.y Mihalas , D.(1976) : Astrophys J., 205 , pág.273.
- (34) Ichimaru , S.(1973) : Basic Principles of Plasma Physics : A Statistical Approach , Ed.Benjamin , New York.
- (35) Krook , M.(1956) : Phys.Rev. , 102 , pág.593.
- (36) Kolos , W.y Wolniewicz , L.(1965) : J.Chem.Phys., 43 , pág.2429.
- (37) Kubo , R.(1959) : Lectures in Theoretical Physics , Vol.1
(Sumer Inst.Theor.Phys.Univ.Colorado) , Wiley-Interscience,
New York.
- (38) Kurucz , R.Peytreman , E.y Averett , E.(1974) : Blanketed
Model Atmospheres for Early-Type Stars , Smithsonian
Institution , Washington D.C.
- (39) Landau , L.(1936) : Phys.Z.Sowj.Un., 10 , pág.154.
- (40) Landshoff , R.(1951) : Phys.Rev., 82 , pág.442.
- (41) Lennard-Jones , J.E.(1924) : Proc.R.Soc.A., 106 , pág.441.
- (42) Lenard , A.(1960) : Ann.Phys., 3 , pág.390.
- (43) Liboff , R.L.(1959) : Phys.Fluids , 2 , pág.40.
- (44) Lorentz , H.A.(1905) : Proc.Amst.Acad., 7 pág.438.
- (45) Luciani , J.F., Mora , P.y Pellat , R., (1985) : Phys.Fluids ,
28 , pág.835.
- (46) Machado , M.(1985) : comunicación privada.
- (47) Massey , H.S.W.(1971) : Electronic and Ionic Impact Phenomend ,
Vol.III , Clarendon Press , Oxford.

- (48) Max , C.E., Mc Kee , C.F.y Mead , W.C.(1980) : Phys.Fluids ,
23 , pág.1620.
- (49) Max , C.E.(1981) : Lawrence Livermore Laboratory Report
UCRL-53107.
- (50) Maxwell , J.C.(1867) : Phil.Trans.R.Soc., 157 , pág.49.
- (51) Mihalas , D.(1972) : NCAR Technical Note NCAR-TN SRR-76 ,
Boulder.
- (52) Mihalas , D.(1978) : Stellar Atmospheres , 2º edición ,
W.H.Freeman , San Francisco.
- (53) Opradolce , L.(1984) : no publicado.
- (54) Papadopoulos , K.(1977) : Revs.Geophys.Sp.Phys., 15 , pág.113.
- (55) Present , R.D.(1958) : Kinetic Theory of Gases , Mc Graw
Hill Book Co., New York.
- (56) Rosenbluth , M.N., Mc Donald , W.M.y Judd , D.L.(1957) :
Phys.Rev. 107 , pág.1.
- (57) Rousell-Dupree , R.(1980) : Solar Phys., 69 , pág.243.
- (58) Shiff , L.I.(1955) : Quantum Mechanics , Mc Graw-Hill Book Co.,
New York.
- (59) Shvarts , D., Delecttrez , J., Mc Crory , R.L.y Verdon ,
C.P.(1981) : Phys.Rev.Letters , 47 , pág.247.
- (60) Spitzer , L.y Härm , R.(1953) : Phys.Rev., 89 , pág.977.
- (61) Spitzer , L.(1962) : Physics of Ionized Gases , Interscience,
New York.
- (62) Temkin , A.y Lakin , J.C.(1961) : Phys.Rev., 121 , pág.788.

- (63) Thomas , R.(1961) : Some Aspects of Non-Equilibrium Thermodynamics in the Presence of a Radiation Field , Univ, of Colorado Press , Boulder.
- (64) Verga , A.D.(1982) : The Astrophys.Journal , 260 , pág.286.
- (65) Williams , R.H.y De Witt , H.(1968) : citado como "unpublished" por Devoto (1968).

Agradecimientos

Deseo expresar mi agradecimiento :

Al Dr. Constantino Ferro Fontán por su apoyo como Director de Tesis y Consejero de Estudios y su paciente colaboración en los trámites realizados.

Al Director del Centro de Cómputos del Instituto Nacional de Cinematografía , Lic. Mario Comi por facilitarme el uso de la computadora de esa institución.

Al Director del Centro de Tecnología y Ciencias de Sistemas de la Universidad de Buenos Aires por permitirme el uso de la computadora de ese centro.

Al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas por el apoyo financiero para la realización de mi Tesis.

A mi querida esposa por su constante apoyo y paciente transcripción del manuscrito de esta Tesis .